

令和 6 年 6 月 19 日現在

機関番号：32658

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03643

研究課題名(和文) 非線形結合振動子系における同期モードの共存と引き込み現象に関する数理解析

研究課題名(英文) Mathematical analysis of the coexistence of multiple synchronization modes and the entrainment in coupled nonlinear oscillators

研究代表者

江上 親宏 (Egami, Chikahiro)

東京農業大学・地域環境科学部・教授

研究者番号：90413781

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、リミットサイクル振動子による結合振動子系における同期モードの共存、強制引き込み現象および結合の時間遅れの影響について、理論と実験の両面からのアプローチを推進した。主な研究対象を化学振動子のBelousov-Zhabotinsky (BZ) 反応とvan der Pol型発振回路とし、これらで構成される結合振動子系の周期解の存在性、安定性、共存に関する数値解析に取り組んだ。また、ポンプとチューブによる時間遅れ結合機構の性能評価に向けた基礎実験として、BZ単振動子の遅延フィードバック系を構築し実験データを取得した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

近年、生命科学やロボット制御の分野を中心に非線形結合振動子系の応用が拡大している。本研究では、その具体的な応用にあって直面する同期モードの共存および強制引き込みを「利用する制御」と「防ぐ制御」の両方の問題に対して理論的なアプローチ法の確立を目指している。また、理論的な研究のみにとどまらず実証実験を並行して進めることにより、研究成果の社会実装の可能性を高めるものである。

研究成果の概要(英文)：This study examined the coexistence of synchronization modes, the entrainment phenomena, and the effects of delayed coupling on the dynamics for the coupled limit cycle oscillators using both theoretical and experimental approaches. The main research subjects were the existence, stability, and coexistence of limit cycles for the coupled Belousov-Zhabotinsky (BZ) reaction system and the coupled van der Pol type oscillator. In addition, as a basic experiment for evaluating the performance of a delayed coupling device using pumps and tubes, a delayed feedback system of a simple BZ oscillator was constructed and experimental data was obtained.

研究分野：応用数学

キーワード：結合振動子系 リズム現象 同期現象 Hopf分岐 同期モード 時間遅れ結合 遅延フィードバック

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

(1) リミットサイクル振動子とは、システムに内生的な周期で軌道安定な振動を発生させる非線形振動子である。リミットサイクルの存在と安定性に関する問題とは、まさに Hopf 分岐の存在と方向性 (Supercritical, Subcritical) について調べることを指す。リミットサイクル振動子を複数結合した結合振動子系の研究は、物理学の世界で長い歴史をもち、近年では生物学、生命科学、ロボット制御工学などの分野でも応用が進んでいる。結合振動子系は同期 (Synchronization) と呼ばれる現象を生起する。同期とは、似た性質の振動子同士を何らかの方法で結合させるとき共通の周期 (振動数) を持つ振動に陥る現象であり、同相 (in-phase)、逆相 (anti-phase)、異相 (out-phase) の同期モードが存在する。1 つの結合振動子系に対して同期モードは必ずしも 1 種類とは限らず、複数の安定周期解が共存し、初期条件次第でいずれの解に漸近するか変わる場合がある。一方、リミットサイクル振動子は強制引き込み (Entrainment) を起こす。これは、リミットサイクル振動子にある一定範囲の振動数で外部摂動を加えたとき、互いの振動数に差があると振動子が振動数を変化させて外部摂動に同調する現象のことである。1970 年代以降、リミットサイクル振動子の結合振動子系の同期現象について Strogatz、Kuramoto 等を中心とする研究者によって深く研究されてきた。よく知られるとおり、同期と相転移の本質を記述する位相方程式として Kuramoto model は完成形である。しかしながら、実際の応用上は現象を具体的に記述するモデルの精緻な解析が必要になる。

(2) 近年、状態の履歴を考慮した微分方程式 (関数微分方程式) の重要性が認識されており、生物学と経済学の分野を中心に盛んな研究が行われている。時間遅れは分岐やカオスを引き起こし、解の構造安定性に影響を与える要因であることが認知される一方で、その解析的な取扱いは常微分方程式と比較して格段に難しく、特にシステムに対する一般的な解析手法は発展の途にある。

(3) 上記 (1), (2) の問題を理論的に解析する上で有効な手法の 1 つとして写像度理論がある。常微分方程式系の Hopf 分岐解析へ S^1 -degree [Dylawerski *et al.*, Ann. Plon. Math. **62** (1991), pp.243-280] を応用する研究は Krawcewicz, Hirano, Rybicki 等によって先駆的に行われた。2008 年頃までに van der Pol 型結合振動子系や時間遅れをもつ Lotka-Volterra 型方程式系に関する成果が発表されている。Balanov *et al.* [TMNA, **27** (2006), pp.29-90] では、回転対称性をもつ van der Pol 型結合振動子系においてリミットサイクルの個数を調べる方法が開発された。非自励系における自明な周期を持つ周期解の存在問題には、Coincidence degree [Gaines & Mawhin, LNM 568 (1977)] が有用である。そこで残されている問題の中から次の点に焦点をしぼり本研究課題の立案に反映している：

- ・ 結合振動子系のリミットサイクルの安定性に関する問題はほとんど未解決である。
- ・ 特に、BZ 反応の結合振動子系の Hopf 分岐に関して国内外の研究報告はない。
- ・ 実験面で比較的正確かつ手軽にデータを取得できるのは van der Pol 型発振回路であるが、結合振動子系に時間遅れを実装し調節可能であるのは BZ 反応である。

2. 研究の目的

本研究では、リミットサイクル振動子による結合振動子系における同期モードの共存、強制引き込み、結合の時間遅れの影響の数理解析を目的とする。特に、写像度理論と位相縮約理論を融合して、周期解の分岐・安定性解析の新技术を開発する。主な研究対象は Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反応系とする。安定なリミットサイクルの共存問題においては、 S^1 -degree と位相縮約法を組み合わせるリミットサイクルの振動数を区別する方法を考案する。周期的な外部摂動による強制引き込み現象に対しては、Coincidence degree と位相縮約法を組み合わせる解の安定性判別の手法を提示する。

また、本研究では実験と理論解析の両輪により数学協働の成果を追求する。数学的視点から定理に沿って結合力や時間遅れの大きさを調節できるような工夫を施した実験系を再設計・構築し、モデルの解析結果を実証する観測データの取得を目指す。

3. 研究の方法

(1) BZ 反応結合振動子系の同期モードと時間遅れの影響の分析

ポンプ結合による 2 槽時間遅れ結合 BZ 反応系は、適当な結合強度の下で時間遅れが大きくなるとリミットサイクルが分岐を起こし 2 個の安定解が共存する。結合強度と時間遅れが同期モードに与える影響について、実験と数理解析により研究する。

(2) 光感受性を利用した BZ 反応系のリズム制御 (非自励系の強制引き込み)

BZ 反応に混合する金属触媒 (活性因子) としてルテニウム錯体を用いると、その光感受性の作用で振動を抑制できる [Gaspar *et al.*, Z.Phys.Chem., **264** (1983), pp.43-48]。この性質を利用して、強制引き込みによる BZ 反応のリズム制御について研究する。

(3) ポンプとチューブによる時間遅れの実装を再検証するための基礎実験

従来の実験では、ポンプ流量とチューブ長の設定を試行錯誤的に変更することで結合強度と時間遅れの相対的な調節を実現してきたが、実証実験でより良い成果を上げるためにはパラメ

ータ値の同定が不可欠である。この課題に対して結合振動子系を用いたデータ観測では直接のアプローチが困難であるため、単一の BZ 振動子の遅延フィードバック系を構築し、モデリング、シミュレーション、実験データ取得の手順で研究を進める。

4. 研究成果

(1) 同一の BZ 反応槽をポンプとチューブでつなぐ実験系を構築し、ポンプの ON/OFF を繰り返しながら各槽の酸化還元電位の時間変化を記録した。実験の結果、時間遅れが小さい場合には同相モードしか存在しないが、時間遅れがある程度大きくなると同相モードと逆相モードが共存することを示すデータの取得に成功した (図 1)。

対称性をもつ 2 槽時間遅れ結合 BZ 反応系は、次式でモデル化される：

$$(C) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x}_i = x_i(1-x_i) - \alpha z_i \frac{x_i - \mu}{x_i + \mu} + c(x_j(t-\tau) - x_i) \\ \dot{z}_i = x_i - z_i + c(z_j(t-\tau) - z_i) \end{cases} \quad \varepsilon > 0, c > 0, \alpha > 0, \mu \in (0,1) \quad i, j \in \{1,2\}, i \neq j$$

方程式系 (C) が複数の安定なリミットサイクルを持つことを証明する。証明手順の概要は次のとおりである：①スケール変換により (C) の時間遅れを形式的に 1 とすれば、 τ が係数として項の前に出る。②周期解を Hilbert 空間上で S^1 -equivariant compact mapping の不動点として表現する。③ τ, c を用いた条件の下でホモトピーを構成し、解写像の S^1 -degree を計算する。現状、手順③について Balanov *et al.* によって確立された計算手法の適用を進めている。

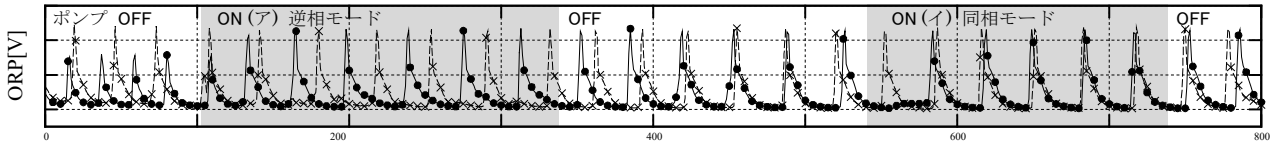


図 1：時間遅れ的作用による同期モードの共存 (●— 反応槽 1, -×- 反応槽 2)
一連の波形の中で、2 つの安定なリミットサイクルが確認できる。

(2) BZ 反応系のリズム制御については、非自励系モデル

$$(P) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = x(1-x) - \alpha(t)z \frac{x-\mu}{x+\mu} \\ \dot{z} = x - z \end{cases} \quad \varepsilon > 0, \mu \in (0,1), \alpha \in C(\mathbb{R}; (0, \infty)): T\text{-periodic}$$

における T 周期解の存在と強制引き込みについて次の手順で解析する：① α が定数の場合の自励系の Hopf 分岐を調べる。② α に周期 T で摂動を加えた場合の T 周期解の存在を Coincidence degree により証明する。③位相方程式と Floquet 理論により、 T の範囲と Attractor, Repellor の存在領域の関係を調べる。このとき、写像度の加法性から安定性と写像度の値の紐づけが可能になる。目下、手順③の計算を進めている。

(3) 単一 BZ 振動子の遅延フィードバック系は次式でモデル化される：

$$(D) \quad \begin{cases} \dot{x} = \varepsilon^{-1} \left\{ x(1-x) - \alpha z \frac{x-\mu}{x+\mu} \right\} + c(x(t-\delta) - x) \\ \dot{z} = x(t) - z(t) + c(z(t-\delta) - z) \end{cases} \quad \varepsilon > 0, c > 0, \alpha > 0, \mu \in (0,1)$$

図 2 は系 (D) の数値シミュレーションの結果であり、(ア) から (カ) の各図はパラメータ c, δ の各値に対する解の波形 $z(t)$ と相曲線 (x, z) を示している。

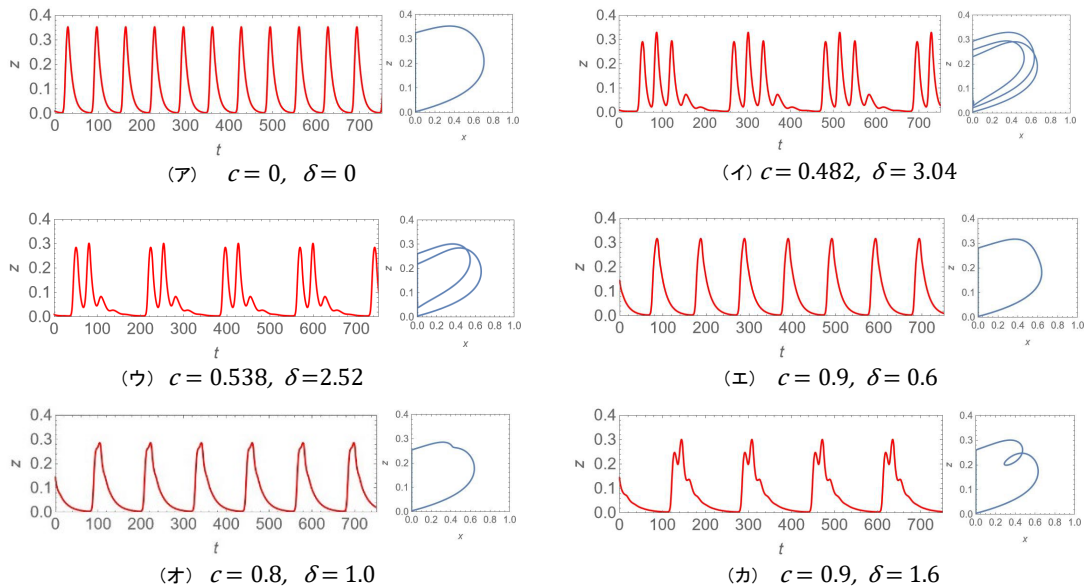


図 2：遅延フィードバック系 (D) の数値シミュレーション (左図は波形 $z(t)$, 右図は相曲線 (x, z))

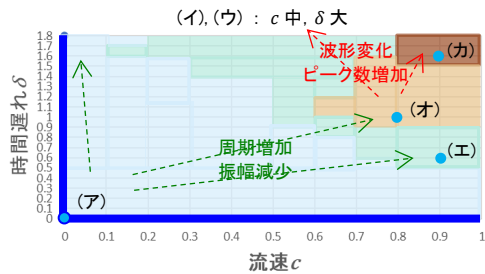
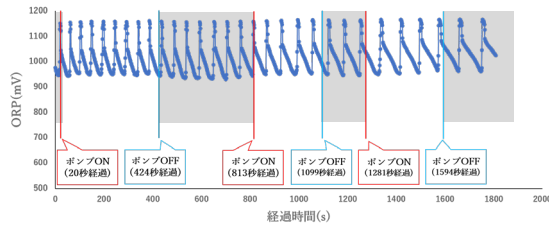


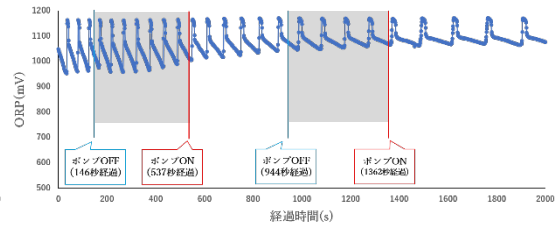
図 3 : c, δ による系 (D) の波形の分類



図 4 : 遅延フィードバック系の実験系



(a) 流速 1.75mL/s, チューブ長 50cm, チューブ内滞在時間 3.5s



(b) 流速 1.75mL/s, チューブ長 100cm, チューブ内滞在時間 7.1s

図 5 : 遅延フィードバック系の観測データ

図 3 は、図 2 に示す波形の特徴を c, δ の値によって分類したグラフであり、(ア), (エ), (オ), (カ) の各波形と同様の特徴を発現するパラメータ値の組み合わせの領域を色分けによって示したものである。(イ), (ウ) は図中の領域の外側に位置する点となる。図 4 は、遅延フィードバック系の波形観測のための実験系の全容である。このとき図 4 のポンプ OFF の場合は、図 3 (ア) に合致する。ここで、もしポンプ強度とチューブ長の変更によって溶液移送の時間遅れの調節がうまく実装できていると仮定するならば、ポンプの ON/OFF の切換えにより (ア) → (イ) → (ア) → (イ) → ... や (ア) → (エ) → (ア) → (エ) → ... のような ORP 波形のスイッチを観測することが可能であろうという仮説が立つ。図 5 は実際の観測データの一例である。図 5(a) ではポンプ ON により (ア) → (エ)、図 5(b) ではポンプ ON により (ア) → (オ) の変化に概ね合致する観測データを取得することができた。一方で、(a), (b) とともにポンプ OFF による (エ) → (ア), (オ) → (ア) の即時的な波形の変化を捉えることはできなかった。ポンプ OFF → ON で振動周期が大きくなる変化は観測し易く、ON → OFF で周期が短くなる変化は観測が難しいことから、ポンプで溶液を循環させることにより数値モデル導出過程における化学的仮定が大きく揺らぐことがないか検証を進める必要がある。また、本研究期間では図 3 (イ), (ウ) に該当するような中域の流速で時間遅れの大きい場合の実験データを取得することができなかったため、反応槽の大きさ、溶液の量、チューブ径、ポンプのパワーのチューニングを今後の検討課題とする。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 2件／うち国際学会 0件）

1. 発表者名 江上親宏
2. 発表標題 BZ反応振動子におけるDelayed feedbackの影響を観測する実験
3. 学会等名 第4回高専間ネットワークによる微分方程式研究会（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 江上親宏
2. 発表標題 リズムと同期
3. 学会等名 東京農業大学「食と農」の博物館，自然の中の数学展トークショー（招待講演）
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

—

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------