

令和 6 年 6 月 1 日現在

機関番号：24405

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03829

研究課題名（和文）弦理論の非摂動論的な効果の解析から、M理論の地図の解明へ

研究課題名（英文）Towards A Map Of M-theory

研究代表者

森山 翔文（Moriyama, Sanefumi）

大阪公立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：80402452

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,800,000円

研究成果の概要（和文）：10次元弦理論の非摂動論的な効果や11次元に拡大するM理論の全体像を理解したい。特に対称性や可積分構造の視点から、M2ブレーンを記述する理論の大正準分配関数の普遍的な特徴を捉えたい。本研究期間において得られた成果により、双対性やハナニー・ウィッテンのブレーン遷移が大分配関数の書き換えから得られるスペクトル演算子のワイル群の対称性に同定され、円周上でブレーン遷移を継続的に実行する双対カスケードが大分配関数のアフィンワイル群の対称性に同定された。この同定により大分配関数がパンルヴェ方程式を満たすことを発見した。また、双対カスケードの有限性と一意性に関する疑問を幾何学的に翻訳し、肯定的に解決した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

対称性を用いて物理を捉え直すことは、様々な物理系に対して広く行われる研究手法である。本研究では特にM2ブレーンやM理論をワイル群やアフィンワイル群の対称性や可積分構造の視点から理解した。これによりパンルヴェ方程式との関連を明らかにした。数学的にパンルヴェ方程式は非線形微分方程式の特殊関数の発見を目的に考案されたものであるが、物理的な応用を与えることにより大きく拡がりを見せ、これからも互いに影響しながら発展していくと期待される。また、他の超対称ゲージ理論に対してもアフィンワイル群やパンルヴェ方程式との関連が指摘されており、これを通じて広く他の超対称ゲージ理論との関係が解明されていくと期待される。

研究成果の概要（英文）：It is known that the worldvolume theories of M2-branes are described by super Chern-Simons theories and that their grand canonical partition functions are given by the Fredholm determinants of spectral operators. Here we identify symmetries of the Weyl group for the spectral operators as Hanany-Witten brane transitions and symmetries of the affine Weyl group for the grand canonical partition functions as duality cascades. This identification enables us to understand the integrable structures of the q-deformed Painleve equation in these theories. Specifically, the grand canonical partition functions are extended beyond their original domain and are shown to satisfy the q-Painleve equation for the entire parameter space. Additionally, we reformulate the questions regarding duality cascades -whether duality cascades always terminate and whether the endpoint is uniquely determined by the starting point- into a purely geometrical question on zonotopes and answer the questions positively.

研究分野：超弦理論

キーワード：超対称チャーン・サイモンズ理論 行列模型 フレドホルム行列式 ワイル群 アフィンワイル群 双対カスケード 平行多面体 パンルヴェ方程式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

10次元弦理論は統一理論の最終形として有力視されている。その豊かな非摂動的な効果により、発見当初の想像をはるかに超える展開を遂げている。特に、非摂動的には11次元のM理論に拡大し、弦ではなく膜(M2 ブレーン)が主役となる。また、M2 ブレーンに対して、重力理論とゲージ理論の対応関係から自由度が $3/2$ 乗則に従うことは知られていたが、M2 ブレーンを記述する理論は長らく謎に包まれていた。近年、アハロニー、バーグマン、ジャフェリス、マルダセナの4氏により、チャーン・サイモンズ理論の超対称化を用いて記述されることが発見された(ABJM理論)。超対称理論の局所化公式を用いて、無限次元の経路積分で定義されたその分配関数が有限次元の行列積分に帰着され、その評価から $3/2$ 乗則が再現された。高い超対称性から可積分性が期待され、研究代表者らの先行研究によれば、摂動補正がエアリー関数に足し上げられ、また非摂動的な効果が位相的弦理論の自由エネルギーにより記述されることが発見された。さらに、フラクショナルブレーンやウィルソンループ演算子を導入した分配関数や相関関数には、可積分構造を示唆する多くの関係式が発見された。また、ABJM理論の多くの拡張が考案され解析されてきた。このようなM2 ブレーンの理論の発展に対して、対称性や可積分構造の視点から理解することが期待されていた。

### 2. 研究の目的

上記の研究背景の中、M2 ブレーンを含むM理論の非摂動的な効果の普遍的な性質を、対称性や可積分構造から理解し、特定の背景を超えたM理論の全体像に対して知見を得ることが研究の目的である。具体的には、M理論の特定の背景に依存しない普遍的な性質を明らかにし、M理論全体の構造や挙動について新たな知見を得ることを目指している。これにより、M理論の全体像をより深く理解し、さらなる発展に寄与することが期待される。

### 3. 研究の方法

M2 ブレーンの分配関数に対して、ランクを粒子数と見なして大正準集団に移行し、最低次で規格化すると、スペクトル演算子のフレドホルム行列式になる。このスペクトル演算子のフレドホルム行列式は例外群のワイル群の対称性を持つことがある。また、M2 ブレーンを記述する超対称チャーン・サイモンズ理論には、ブレーン配位による理解がある。具体的には、IIB弦理論の直交する方向にNS5 ブレーンと $(1, k)5$  ブレーンが配置された円周上のD3 ブレーンは、弦理論の双対性を経て、特定の背景上のM2 ブレーンとなる。このブレーン配位に対して、超対称チャーン・サイモンズ理論の双対性はハナニー・ウィッテンのブレーン遷移により実現される。これら二つの視点を統合することにより、対称性の観点からM2 ブレーンの解析を進めることが可能になる。さらに、対称性がワイル群やアフィンワイル群を含むことから、パウルヴェ方程式との関係が示唆される。これらの解析方法により、M2 ブレーンの非摂動的な効果の普遍的な性質を明らかにし、M理論の全体像に対する新たな知見を得ることを目指す。

### 4. 研究成果

ハナニー・ウィッテンのブレーン遷移を用いて、M2 ブレーンを記述する理論の双対性を理解できる。これによれば、2種類の5ブレーンを入れ替えると、その間にあるD3ブレーンの数が変換される。しかし、M2 ブレーンの分配関数や対応するスペクトル演算子と対称性を比較する際に、このハナニー・ウィッテンのブレーン遷移を無批判に使用すると、すぐに混乱が生じる。本研究の[Kubo-Moriyama 2019]では、力学系に対して基準系を決めるように、または、多様体に対して局所座標系を設定するように、一時的に最低ランクで円周上のブレーン配位を線分に切断することを提唱した。これにより、行列式内のスペクトル演算子の巡回対称性と、円周上のブレーン配位の巡回対称性が一旦固定され、混乱なく比較が可能になる。この方法を用いることで、ブレーン描像における相対ランクやFIパラメータと、スペクトル演算子の係数を完全に対応付けることができた。

スペクトル演算子がワイル群の対称性を持っている場合、この対称性をブレーン描像の相対ランクやFIパラメータの変換に翻訳することで、ハナニー・ウィッテンのブレーン遷移をより精密に理解できる。具体的には、スペクトル演算子の係数に対するワイル群の変換を、相対ランクやFIパラメータに対する変換に書き換えることで、既知のブレーン遷移を拡張した新しいブレーン遷移を同定することができる[Furukawa-Moriyama-Nakanishi 2021]。

スペクトル演算子が例外群のワイル群の対称性を持つ場合はデルペッツォ幾何として知られて

いる。特にランクが大きい例外群のとき、量子スペクトル演算子の構築は非常に複雑である。古典幾何の場合、縮退を導入することで、トーリック幾何の最大ランクの E6 を超えて E7 や E8 を構築することができていた。量子的な演算子に拡張する際に、縮退がないトーリック幾何に対しては、ワイル順序積を導入することで構築されると予想できるが、縮退がある場合の扱いは不明だった。そこで本研究では、最大ランクの E6 に対して、相似変換を用いて縮退がある表示に移行することで、縮退がある場合の表示方法を読み取った。これにより、縮退を持つ E7 や E8 の量子スペクトル演算子を構築することが可能になった[Moriyama 2020, Moriyama-Yamada 2021]。特に E8 の量子スペクトル演算子の構築はこれまでの文献で未解決であった。さらに、一般にアフィンワイル群の表現からパンルヴェ方程式が構築されるため、この解析はパンルヴェ方程式の構築においても重要な意味を持つ。

量子スペクトル演算子の重要な応用として、量子ミラー写像の解析がある。これまで、主に B サイクルの解析から位相的弦理論の自由エネルギーの重要な指数が求められていたが、分配関数を位相的弦理論の自由エネルギーで記述するには、A サイクルからミラー写像を読み取ることも必要である。本研究ではこのミラー写像の解析を D5 の場合[Furukawa-Moriyama-Sugimoto 2020] や E6、E7、E8 の場合[Moriyama 2020]に対して実行した。これにより、デルペッツォ幾何に対応する M2 プレーンの分配関数を完全に群不変量で記述することができるようになった。

これまで述べたように、M2 プレーンを記述する超対称チャーン・サイモンズ理論には双対性があり、プレーン描像ではプレーン遷移、スペクトル演算子ではワイル群の対称性として理解されていた。さらには M2 プレーンのプレーン描像は円周上に配置されているため、プレーン遷移を継続的に実行することができ、これを双対カスケードという。双対カスケードの議論における混乱を避けるため、まず[Kubo-Moriyama 2019]の提案に従って最低ランクを基準ランクとして円周上のプレーン配位を線分に切断しておく。その上で、双対カスケードの作業仮説として、基準ランクを跨がないプレーン遷移を任意に行い、基準ランクよりも低いランクが現れれば基準ランクを取り換える、という操作を考える。このような設定で、双対カスケードが必ず有限回の操作で終了するか、さらに、終了するとすれば終点が一意であるか、という疑問が自然に生じる。[Furukawa-Matsumura-Moriyama-Nakanishi 2022, Furukawa-Moriyama-Sasaki 2023]では、双対カスケードの終点集合を双対カスケードの基本領域と定義した上で、上記の疑問を、双対カスケードに対応する離散的な平行移動を経て作られる基本領域の無限個のコピーが、互いに重複も空白もなく全パラメータ空間を埋め尽くすか、つまり、基本領域が平行多面体であるか、という離散幾何学的な問題に翻訳した。さらに、基本領域が線分のベクトル和であるゾーン多面体をなすことを示し、ゾーン多面体の空間充填の判定条件を用いて上記の双対カスケードに関する有限性や一意性の疑問を肯定的に解決した。特にワイル群の対称性を持つ場合には、基本領域はアフィンワイル部屋になる[Furukawa-Matsumura-Moriyama-Nakanishi 2022]。

基本領域の特定は双対カスケードの有限性や一意性の理解に役に立つだけでなく、分配関数を幾何学的に考察する上での優位性もある。実際、これまでの ABJM 理論やその拡張に関する研究では、 $q$  変形されたパンルヴェ方程式との関係が議論されてきたが、基本領域の特定により議論がより明確になった。[Moriyama-Nosaka 2023]では、ABJM 理論について調べた先行研究を受けて、その拡張版となる NS5 プレーンと  $(1, k)5$  プレーンを複数持つ系において、大正準分配関数が双線形形式の  $q$  変形された第 6 パンルヴェ方程式 ( $qPVI$ ) を満たすことを発見した。具体的な解析内容は下記の通りである。大正準分配関数の最低次では円形クイバーが線形クイバーに退化し、分配関数が簡単な明示的な式で与えられる。その明示式を用いて、共変的な 40 個の  $q$  パンルヴェ方程式  $qPVI$  の係数を特定した。また、高次項を取り込んだ大正準分配関数も  $qPVI$  を満たすことを数値的に確認した。

もともと基本領域内で定義された分配関数とその領域内でパンルヴェ方程式を満たすことが確認されただけであるが、基本領域の平行多面体の構造を解明したことで、アフィンワイル群の対称性を明確にし、分配関数の定義域もパンルヴェ方程式の有効域も全パラメータ空間に拡大できることを示した[Moriyama-Nosaka 2024]。

さらに、M2 プレーンを記述する理論である ABJM 理論の分配関数や相関関数の近年の発展について、総合的に解説した書籍を執筆した[森山翔文 2020 サイエンス社]。この書籍では、局所化公式によって行列模型に帰着された ABJM 理論の分配関数の構造を説明し、その後、ABJM 行列模型におけるトーフト展開から世界面インスタントン効果、WKB 展開から膜インスタントン効果、さらに厳密値から両者の関係を解明した発展を説明した。フラクショナルプレーンやウィルソングループ演算子を取り入れた分配関数や相関関数に対して成り立つ可積分構造を示唆する様々な関係式についても解説した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 8件）

1. 著者名 Sanefumi Moriyama, Tomoki Nosaka	4. 巻 5
2. 論文標題 Affine symmetries for ABJM partition function and its generalization	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 153
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP05(2024)153	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Sanefumi Moriyama, Tomoki Nosaka	4. 巻 8
2. 論文標題 40 bilinear relations of q-Painleve VI from N=4 super Chern-Simons theory	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 191
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP08(2023)191	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Tomohiro Furukawa, Sanefumi Moriyama, Hikaru Sasaki	4. 巻 56
2. 論文標題 Duality cascades and parallelotopes	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 165401
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/acc2fb	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Tomohiro Furukawa, Kazunobu Matsumura, Sanefumi Moriyama, Tomoki Nakanishi	4. 巻 5
2. 論文標題 Duality cascades and affine Weyl groups	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 132
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP05(2022)132	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sanefumi Moriyama, Yasuhiko Yamada	4. 巻 17
2. 論文標題 Quantum Representation of Affine Weyl Groups and Associated Quantum Curves	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 76
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2021.076	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sanefumi Moriyama	4. 巻 2021
2. 論文標題 Nambu brackets, Chern-Simons theories, quantum curves and M2-branes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Progress of Theoretical and Experimental Physics	6. 最初と最後の頁 12C102
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/ptep/ptab049	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Tomohiro Furukawa, Sanefumi Moriyama, Tomoki Nakanishi	4. 巻 969
2. 論文標題 Brane transitions from exceptional groups	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nuclear Physics B	6. 最初と最後の頁 115477
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.nuclphysb.2021.115477	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Tomohiro Furukawa, Sanefumi Moriyama, Yuji Sugimoto	4. 巻 53
2. 論文標題 Quantum mirror map for del Pezzo geometries	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 385401
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/ab93fe	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sanefumi Moriyama	4. 巻 10
2. 論文標題 Spectral theories and topological strings on del Pezzo geometries	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 154
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP10(2020)154	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Naotaka Kubo, Sanefumi Moriyama	4. 巻 12
2. 論文標題 Hanany-Witten transition in quantum curves	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 JHEP	6. 最初と最後の頁 101
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP12(2019)101	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計20件 (うち招待講演 14件 / うち国際学会 9件)

1. 発表者名 森山翔文
2. 発表標題 ABJM行列模型とqパンルヴェ方程式
3. 学会等名 日本数学会2024年度年会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 森山翔文
2. 発表標題 M2プレーンとqパンルヴェ方程式
3. 学会等名 研究集会「q級数とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Sanefumi Moriyama
2. 発表標題 M2-brane, quantum curves and parallelotopes
3. 学会等名 14th Taiwan String Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 森山翔文
2. 発表標題 ABJM行列模型の新しい展開 - 平行多面体とパンルヴェ方程式 -
3. 学会等名 数理的学术交流会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Sanefumi Moriyama
2. 発表標題 M2-branes -Parallelotopes & Painleve Equations-
3. 学会等名 National Taiwan University, String Group Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 森山翔文
2. 発表標題 超対称ゲージ理論の魅力
3. 学会等名 城崎素粒子論研究会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 森山翔文
2. 発表標題 ABJM行列模型の新しい展開 - 平行多面体とパンルヴェ方程式 -
3. 学会等名 立教大学数理物理学研究センターセミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 森山翔文
2. 発表標題 双対カスケードと平行多面体
3. 学会等名 京都大学基礎物理学研究所研究会「場の理論と弦理論 2022」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 森山翔文
2. 発表標題 双対カスケードと平行多面体
3. 学会等名 名古屋大学多弦数理物理学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Sanefumi Moriyama
2. 発表標題 M2-branes -Parallelotopes and Bilinear Relations-
3. 学会等名 Osaka Metropolitan University "Quantum Field Theories and Representation Theory"（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年



1. 発表者名 森山翔文
2. 発表標題 Spectral Theories & Topological Strings on del Pezzo Geometries
3. 学会等名 立教大学数理物理学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森山翔文
2. 発表標題 M理論と行列模型の数理物理学
3. 学会等名 大阪大学数学教室談話会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Sanefumi Moriyama
2. 発表標題 M2-branes & Quantum Curves
3. 学会等名 East Asia Joint Symposium on Fields and Strings 2021 (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Sanefumi Moriyama
2. 発表標題 Duality Cascades & Affine Weyl Groups
3. 学会等名 Geometry, Representation Theory and Quantum Fields 2021 (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 森山翔文
2. 発表標題 Nambu brackets, Chern-Simons theories, quantum curves and M2-branes
3. 学会等名 南部力学がつなぐ時空トポロジーとマイクロ・マクロ渦磁場構造形成 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 森山翔文
2. 発表標題 高次元超重力理論の古典解への示唆
3. 学会等名 The 4th workshop on "Mathematics and Physics in General Relativity" (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Sanefumi Moriyama
2. 発表標題 M2-branes: Integrability & Weyl Group
3. 学会等名 The 27th Osaka City University International Academic Symposium "Mathematical Science of Visualization, and Deepening of Symmetry and Moduli" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Sanefumi Moriyama
2. 発表標題 Symmetry Breaking in Quantum Curves & Super Chern-Simons Matrix Models
3. 学会等名 YITP Workshop Strings and Fields 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Sanefumi Moriyama
2. 発表標題 Hanany-Witten Transitions & Quantum Curves
3. 学会等名 Workshop New Trends in Integrable Systems 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Sanefumi Moriyama
2. 発表標題 ABJM Matrix Model and 2D Toda Lattice Hierarchy
3. 学会等名 KEK Theory Seminar (招待講演)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 森山翔文	4. 発行年 2020年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 208
3. 書名 M理論と行列模型	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関

中国	中国科学技术大学			
----	----------	--	--	--