

令和 6 年 5 月 17 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K11827

研究課題名（和文）代数曲面の近似・変形・補間の各操作に適する数値・数式融合計算の開発と検証

研究課題名（英文）Development and Verification of Symbolic-Numeric Computation Suitable for Approximation, Transformation, and Interpolation Operations of Algebraic Surfaces

研究代表者

長坂 耕作（Nagasaka, Kosaku）

神戸大学・人間発達環境学研究科・准教授

研究者番号：70359909

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：実践的な計算において不可避の誤差が含まれると、多項式の性質が悪化し取り扱いが困難となる。そこで基礎的な多項式操作として、連立方程式の解を求める方法に対応するGCDやGroebner基底の研究を推進した。研究成果として、誤差への耐性を基底変換により改善する方法、誤差を軽減する既知の方法の改善方法、多項式の次数や変数の個数が多い場合にも計算を可能とする新しい方法などを提案し、最終的に、これまでの方法では解くことが難しい問題の計算例などを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

単一の代数曲面（代数曲線を含む）で複雑な形状を実現しようとする、著しく高い次数の多項式が必要となってしまう。本研究課題では、数値・数式融合計算（厳密だが遅い計算方法と、高速だが不正確な計算方法を融合させる計算）を用いることで、様々な形で厳密な代数式を近似した形で扱えることに着目し、実践的な計算において不可避の誤差を含んだ多項式に対して、種々の操作の基盤となる計算アルゴリズムの開発を行い、その有効性を計算例により示した。

研究成果の概要（英文）：In practical calculations, unavoidable errors can deteriorate the properties of polynomials, making them difficult to handle. Therefore, we advanced research on the GCD and Groebner bases, which correspond to methods for finding solutions to systems of equations, as fundamental polynomial operations. As a result of our research, we proposed methods to improve resistance to errors through basis transformation, ways to improve known methods to reduce errors, and new methods that enable calculations even when the degree or the number of variables in a polynomial is large. Ultimately, we demonstrated examples of calculations for problems that were difficult to solve with previous methods.

研究分野：計算機代数

キーワード：数値・数式融合計算 近似GCD 近似Groebner基底 SLRA 補間法 Bernstein基底

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

コンピュータグラフィックスや計算機援用設計などで形状データの生成(モデリング)を行う際、曲面(曲線を含む)は必要不可欠な要素となっている。このとき、アフィン変換のような点を対象とする操作を除くと、形状の修正操作(アーティストがポインティングデバイスで細かに修正する操作)は特定の形状に依存しており、データの階層性が失われる。つまり、計算機上の様々なモデル(オブジェクト指向プログラミングやネットワーク階層モデルなど)において実現されているカプセル化(または階層分離)が、モデリングでは実質上、実現されていない。モデリングがより一層の学術的発展をするためには、変形操作の自由度の高さを確保しつつ、形状データへの依存性の低い継続可能な変形操作の実現が求められていると言える。

集合と演算(写像)で定義される代数系(または代数的構造)は、対象データに非依存で高度な演算が可能な数理モデルである。曲面は、多項式で記述される連立代数方程式の解集合(代数多様体)として表現され、様々な変形が代数的な操作で可能となっている。しかしながら、形状データ全体を代数多様体(代数曲面を含む)として扱うことは、定義に必要な多項式の次数が著しく巨大になるため実用に耐えない。そのため、次数を低く抑えつつ、自由度や精度も確保する、何らかの近似が必要とされる。

複雑な関数を多項式ないしは有理式(多項式を分子分母に持つ分数)を用いて近似することは、補間法と平行して、1990年代から数値・数式融合計算の分野で熱心に研究が行われてきている。しかしながら、単一の代数曲面を用いるデメリット(必要とされる多項式の次数が著しく大きくなること)から、一般に単一の代数曲面を用いることは避けられている。代数曲面は、代数多様体に含まれる概念であり、近似 Groebner 基底を用いることで、より低次の多項式で近似できる可能性もあるが、近似 Groebner 基底を用いた先行研究は行われていない。

そこで、どのように数値・数式融合計算を活用することで代数多様体によるモデリングが可能となるのか、曲面の各種操作に適した数値・数式融合計算のアルゴリズムは実現可能か、などの「数値・数式融合計算アルゴリズムの曲面操作への可能性」の探求が期待されていた。

2. 研究の目的

本研究課題の目的は、数値・数式融合計算アルゴリズムの曲面操作への可能性を探求するために、後述の3つの課題を解決することであるが、その先において最終的に目指すゴールは、モデリングから形状データの配置までのワークフロー(パイプライン)において、その大部分を代数的な操作で実現可能とすることである。具体的に設定した課題の一つは、近年の近似 GCD(最大公約数の多項式版である最大公約多項式)や近似無平方分解アルゴリズムの研究成果に基づき、一変数多項式を用いた有理関数近似による曲線や曲面の近似・補間操作の再評価を行うこと。そして、多様な曲面操作を実現するために必要となる、多変数多項式の近似 GCD などの数値・数式融合計算アルゴリズムの改良・開発を行うこと。最後に、曲面の近似・変形・補間のどの目的にも活用しうる近似 Groebner 基底の改良・検証を進めること。これら3つの課題解決を目的としていた。

3. 研究の方法

本研究課題の研究開始時点における研究方法を述べる。1つ目の課題(一変数多項式を用いた有理関数近似による曲線や曲面の近似・補間操作の再評価)においては、研究代表者が開発している一変数多項式の近似 GCD を求める複数のアルゴリズムを実装したライブラリ(サブルーチンの組み合わせを含めると、200種を超えるアルゴリズムが利用可能)を活用することで、参考文献 KN00 で用いられた方法が近年の近似 GCD アルゴリズムによりどの程度改善されるかを検証する。この再評価の結果にも基づき、2つ目と3つ目の課題の研究を次の手順で進める。

2つ目の課題(多変数多項式向けのアルゴリズム)では、前述の近似 GCD ライブラリの開発において先行研究のアルゴリズムで使われるサブルーチンの組み合わせを交叉させることにより、アルゴリズムの著しい性能向上が見られていることを鑑み、多変数多項式の近似 GCD アルゴリズムは、一変数多項式向けと大きく異なる部分もあるものの、サブルーチン部分の交叉による性能向上を見込み、同様の方法での改良を行う。3つ目の課題(近似 Groebner 基底)では、代数曲面の操作に近似 Groebner 基底を用いるために、代数多様体としての次元(イデアルとしての次元)を扱えなければならない。次元を指標として扱えうる近似 Groebner 基底アルゴリズムは、研究代表者が提案した行列の SLRA(Structured Low Rank Approximation)問題に帰着した構造化 Groebner 基底のみとなっている(参考文献 K11)。しかしながら、発表当時に使用した SLRA の解法は現在のものに比べ劣り、その後の Groebner 基底に関する研究成果も反映されていないため、1) 近年の近似 GCD アルゴリズムで使用される SLRA 問題の解法により、構造化 Groebner 基底がどの程度改善されるのか、2) 構造化 Groebner 基底アルゴリズムは、Groebner 基底を求める F4

アルゴリズムに基づいているが、その改良である F5 や M4GB などの近年のアルゴリズムによる知見でどの程度改善されるのか、を理論と実践の両面から明らかにする。ただし、1 つ目の課題の再評価において、一変数多項式の近似 GCD などの改良が必要と判断される場合は、その解決を優先的に行うため、研究計画の修正を実施する。

- KN00: Kai, H., Noda, MT. Hybrid Rational Function Approximation and Its Accuracy Analysis. *Reliable Computing* 6, 429–438 (2000).
- K11: Nagasaka, K. Computing a Structured Groebner Basis Approximately. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC2011)*, 273–280 (2011).

4. 研究成果

1 つ目の課題(一変数多項式を用いた有理関数近似による曲線や曲面の近似・補間操作の再評価)において、有理関数近似の手法(参考文献 KN00)で再評価を行ったところ、近年の近似 GCD アルゴリズムによる性能向上は見られるものの、サンプリングデータとの誤差に関してはあまり改善が見られなかった。このことから当初の研究計画の修正を行っており、研究成果の大部分は新しい近似 GCD アルゴリズムの提案で構成される(近似 Groebner 基底に関しては、課題整理に留める)。

(1) Bernstein 基底による近似 GCD におけるサンプリングデータとの誤差の縮小

従来の一変数多項式の近似 GCD アルゴリズムにおいては、結果求まる多項式関数の値(関数のグラフ)の摂動の最小化は考慮されていない。しかしながら、有理関数近似などのグラフ形状が重要な応用においては、その摂動の最小化は不可避である。そこで、単項式基底(通常の多項式表現で用いられる方法)ではなく、Bernstein 基底による表現での近似 GCD を導入することを提案した。これにより、近似 GCD による有理関数近似された有理式の約分操作の前後で、従来よりも関数の値(グラフ)の摂動を小さく抑えることが可能となった(参考文献 K20)。

(2) 緩和型アルゴリズムによる近似 GCD における NewtonSLRA の改善

多変数多項式の近似 GCD や近似 Groebner 基底の問題は、どちらも数値行列の SLRA 問題にも帰着可能である。SLRA は、与えられた行列からの距離が最小の行列であって、階数がより小さな行列を求める問題である。SLRA の解法としては alternating projection (Cadzow アルゴリズム)などが知られているが、Schost と Spaenlehauer により局所的に 2 次収束する NewtonSLRA アルゴリズムも提案されている。そこで、近似 GCD 計算において最終的に得られる摂動をより小さくするため、NewtonSLRA の緩和型アルゴリズムを提案した(参考文献 K21)。なお、残念ながら、近似 GCD 向けの改善に留まっており、近似 Groebner 基底の改善には寄与しないことが判明している。

(3) SLRA Interpolation による多変数多項式の近似 GCD アルゴリズム

多変数の複数の多項式の近似 GCD 計算においては、巨大な行列に対する SLRA 問題を解く必要があり、計算量の増大を抑える工夫が必要とされた。本研究では、非正方ブロック対角行列の SLRA 問題に帰着する方法を開発し、特に疎な多変数多項式の近似 GCD で性能が顕著であることを示した。「SLRA Interpolation」と名付けた本方式は、多次元 FFT と特異値分解の性質に基づき計算量を著しく抑えるものである。また、次数が高く既存の方法で解くことが困難であった問題の計算結果や、部分終結式行列による初期ベクトル計算を特異値分解ではなく固有ベクトル計算で代用する方法なども報告している(一部を除き、参考文献 K23)。

- K20: Nagasaka, K. Approximate GCD by Bernstein Basis, and its Applications. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC2020)*, 372–379 (2020).
- K21: Nagasaka, K. Relaxed NewtonSLRA for Approximate GCD. *Lecture Notes in Computer Science. Volume 12865. Computer Algebra in Scientific Computing: 23rd International Workshop, CASC 2021, Sochi, Russia, September 13-17, 2021. Proceedings.* Springer., 272–292 (2021).
- K23: Nagasaka, K. SLRA Interpolation for Approximate GCD of Several Multivariate Polynomials. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC2023)*, 470–479 (2023).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Nagasaka Kosaku, Oshimatani Ryo	4. 巻 57
2. 論文標題 Conditional Groebner Basis: Groebner Basis Detection with Parameters	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 ACM Communications in Computer Algebra	6. 最初と最後の頁 160 -- 164
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1145/3637529.3637540	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Nagasaka Kosaku	4. 巻 -
2. 論文標題 SLRA Interpolation for Approximate GCD of Several Multivariate Polynomials	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the 2023 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ISSAC 2023	6. 最初と最後の頁 470 -- 479
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1145/3597066.3597116	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 長坂耕作	4. 巻 2255
2. 論文標題 二変数多項式の近似GCD	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 117 -- 125
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 大島谷遼, 長坂耕作	4. 巻 2224
2. 論文標題 パラメータを伴ったGroebner基底の構造的な検出について	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 79-94
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 長坂耕作	4. 巻 2224
2. 論文標題 近似Groebner基底の逐次算法に向けて（再訪）	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 95-102
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Nagasaka Kosaku	4. 巻 12865
2. 論文標題 Relaxed NewtonSLRA for Approximate GCD	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 272 ~ 292
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-85165-1_16	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 長坂耕作	4. 巻 2185
2. 論文標題 近似GCDでのNewtonSLRAアルゴリズムの効果的な利用に向けて	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 16 ~ 21
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Nagasaka Kosaku	4. 巻 104
2. 論文標題 Approximate square-free part and decomposition	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Symbolic Computation	6. 最初と最後の頁 402 ~ 418
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jsc.2020.08.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nagasaka Kosaku	4. 巻 -
2. 論文標題 Approximate GCD by Bernstein Basis, and its Applications	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the 45th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ISSAC 2020	6. 最初と最後の頁 372 ~ 379
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 長坂耕作	4. 巻 2159
2. 論文標題 バーンスタイン基底関数を用いた近似GCDの評価について	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 132 ~ 136
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 長坂耕作
2. 発表標題 多変数多項式の近似GCD
3. 学会等名 研究集会 Computer Algebra - Foundations and Applications
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kosaku Nagasaka, Ryo Oshimatani
2. 発表標題 Conditional Groebner Basis: Groebner Basis Detection with Parameters
3. 学会等名 The 48th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC 2023) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kosaku Nagasaka
2. 発表標題 SLRA Interpolation for Approximate GCD of Several Multivariate Polynomials
3. 学会等名 The 48th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC 2023) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 長坂耕作
2. 発表標題 二変数多項式の近似GCD
3. 学会等名 研究集会 Computer Algebra - Foundations and Applications
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kosaku Nagasaka, Ryo Oshimatani
2. 発表標題 Groebner basis detection with parameters
3. 学会等名 Computer Algebra in Scientific Computing: 24th International Workshop, CASC 2022 (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 長坂耕作
2. 発表標題 パラメータを伴ったGroebner基底の構造的な検出法の改善
3. 学会等名 日本数式処理学会第31回大会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 長坂耕作
2. 発表標題 近似Groebner基底の逐次算法に向けて（再訪）
3. 学会等名 研究集会 Computer Algebra - Theory and its Applications
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kosaku Nagasaka
2. 発表標題 Relaxed NewtonSLRA for Approximate GCD
3. 学会等名 The 23rd International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing, CASC 2021 (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kosaku Nagasaka
2. 発表標題 Approximate GCD by relaxed NewtonSLRA algorithm
3. 学会等名 The 46th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC 2021) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 長坂耕作
2. 発表標題 NewtonSLRAの緩和アルゴリズムとその効果
3. 学会等名 日本数式処理学会第30回大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 長坂耕作
2. 発表標題 近似GCDでのNewtonSLRAアルゴリズムの効果的な利用に向けて
3. 学会等名 研究集会 Computer Algebra - Theory and its Applications
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 長坂耕作
2. 発表標題 近似GCD関連問題におけるNewtonSLRAアルゴリズムの評価
3. 学会等名 日本数式処理学会第29回大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Nagasaka Kosaku
2. 発表標題 Approximate GCD by Bernstein Basis, and its Applications
3. 学会等名 The 45th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ISSAC 2020 (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 長坂耕作
2. 発表標題 バーンスタイン基底関数を用いた近似GCDの評価について
3. 学会等名 研究集会 Computer Algebra - Theory and its Applications
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 長坂耕作
2. 発表標題 近似GCDとその応用
3. 学会等名 長坂耕作 第28回 日本数式処理学会大会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------