

令和 6 年 5 月 27 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K11830

研究課題名（和文）線形計画問題に対する離散・連続融合アルゴリズムの開発

研究課題名（英文）Development of discrete/continuous fusion algorithm for linear programming problems

研究代表者

北原 知就 (Kitahara, Tomonari)

九州大学・経済学研究院・教授

研究者番号：10551260

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,400,000円

研究成果の概要（和文）：期間全体を通じた一番の研究成果は、最小ノルム点問題を解くアルゴリズムについての理論的な性質を示したこと、また数値計算ソフトウェアを用いて実装し、その挙動を詳細に調べたことである。この研究成果は高い評価を受け、当該分野の一流の国際会議の査読付き抄録、および査読付き論文誌に掲載された。

この研究に加えて、線形計画問題に対する最急降下規則の単体法についてのレポートをまとめたこと、および、二次計画問題に対する単体法の最新の研究について調査を行っており、新たな研究の種を見出しつつある。

研究成果の学術的意義や社会的意義

私たちは日々いろいろな意思決定の問題に直面するが、それを数理最適化問題として定式化して解くことにより、効率的な意思決定を行うことができる。線形計画問題は最も基本的な数理最適化問題であり、超大規模な線形計画問題が解けるようになることで、私たちの日常生活に変革をもたらす可能性がある。

この課題では、線形計画問題を解く効率的なアルゴリズムについて研究した。線形計画問題には離散的な側面と連続的な側面があり、それらをうまく組み合わせることで、効率的なアルゴリズムが開発できると考えた。この課題に取り組んだ結果、線形計画問題を含むより広いクラスの問題を解くアルゴリズムを開発し、高い評価を得た。

研究成果の概要（英文）：The most significant research results throughout the period are to demonstrate theoretical properties of an algorithm for solving minimum norm point problems and implement it using a numerical computation software and investigate its behavior in detail. The results of this research received high praise and were published in peer-reviewed abstracts at prestigious international conferences in the field and in peer-reviewed journals. In addition to this research, I have compiled a report on simplex methods using the steepest descent rule for linear programming problems, and am investigating the latest research on simplex methods for quadratic programming problems, which will provide seeds for new researches to pursue.

研究分野：数理最適化

キーワード：線形計画問題 最小ノルム点問題 単体法 最急降下規則 二次計画問題

### 1. 研究開始当初の背景

線形計画問題は、線形の等式と不等式の制約のもとで線形関数を最大化する問題で、すべての数理計画問題の基礎をなす重要な問題である。2次元の場合、線形計画問題は、多角形で囲まれた領域の中で、線形関数(目的関数)の値が最も大きい点を探す、という問題になる(図1)。一般には、多次元の多面体で囲まれた領域の中で、目的関数が最も大きい点を探す問題となる。線形計画問題の応用は工学的、産業的分野に留まらず、経済学への応用に対して、ノーベル経済学賞が授与されている。

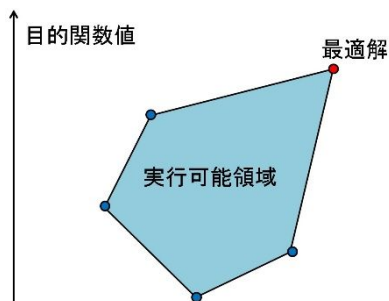


図1：線形計画問題の図示

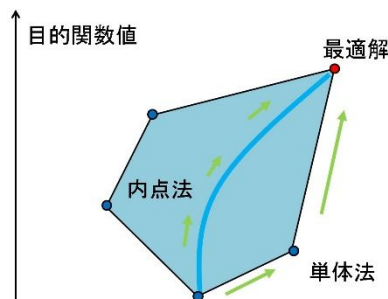


図2：単体法と内点法

これまで線形計画問題を解くアルゴリズムとして、単体法、楕円体法、内点法、LP-Newton法、Chubanov法など様々なものが提案されてきた。線形計画問題に対するアルゴリズムに対する切り口として、線形計画問題の離散性、連続性に注目する、というものがある。上記のアルゴリズムのうち、単体法、LP-Newton法は線形計画問題の離散性に注目した方法である。例えば単体法は、図2に示すように、解が存在する多面体の頂点を辿って最適解を目指す。一方、楕円体法、内点法、Chubanov法は線形計画問題の連続性に着目した方法であり、これらは多項式アルゴリズムという、理論的に良いとされるアルゴリズムのクラスに属する。例えば、図2に示すように、内点法は多面体領域の内部を通る曲線をたどりながら最適解を目指す方法である。

多項式アルゴリズムの上位に位置するアルゴリズムのクラスとして、強多項式アルゴリズムがある。「線形計画問題に対して強多項式アルゴリズムが存在するか」は、今日まで重要な未解決問題として残っている。

### 2. 研究の目的

線形計画問題に対して単体法や内点法といった実用的、あるいは理論的に優れたアルゴリズムが存在するにも関わらず、なお線形計画問題に対するアルゴリズムの研究は続けられている。その一番の理由は、先に挙げた未解決問題「線形計画問題に強多項式アルゴリズムは存在するか」が未だに解決されていないことにある。そして、上記の未解決問題を解決するには、既存のアルゴリズムの延長線上で考えるのではなく、これまででない、新しい発想が必要ではないか、と考えた。

以上の研究背景を踏まえ、本研究では、線形計画問題に対する離散的、連続的アルゴリズムを融合させた新しいアルゴリズムの開発を目指した。そして、本研究の進展により、離散面、連続面の良いところを併せ持つアルゴリズムが開発できれば、前述した未解決問題の解決へ向けた重要な示唆が得られると期待した。

### 3. 研究の方法

上述した目的を遂行するために、本研究は以下の4つの方法で行った。

#### (1) 学術論文、学会参加を通じた最新の研究成果の吸収

最新の学術論文の定期的なチェックや、関連する学会への参加により、本研究課題に関連する分野の最新の研究成果の吸収に努めた。

#### (2) 関連分野の他の研究者との対話、共同研究による研究の進展

関連分野の他の研究者と対話を行い、そこから共同研究に進展させた。この共同研究により、線形計画問題を含む広いクラスの問題を解く新しいアルゴリズムを開発することができた。

#### (3) 計算機実験

計算機実験によって提案アルゴリズムのふるまいを詳細に観察した。そこから得られた知見を理論解析にフィードバックし、さらなる研究の進展につなげた。

#### (4) 学会発表や論文発表を通じた研究成果の発信

本研究の成果は高い評価を受け、当該分野の一流の国際会議の査読付き抄録、および査読付き論文誌に掲載された。また、研究成果を国内外の学会で発表した。これらの研究成果の発信は、他の研究者からのフィードバックを得ることもつながった。

#### 4. 研究成果

本研究で得られた成果は、主に下記の3つである。

##### (1) 最小ノルム点問題に対する更新・安定化による解法のフレームワークの開発

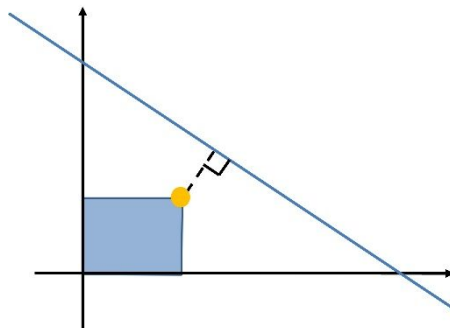


図3：最小ノルム問題の図示

最小ノルム問題は、2次元の場合、直線と長方形領域が与えられたときに、長方形領域にある点で、直線への距離(ノルム)が最も小さい点を求める問題である(図3)。ここで、長方形領域は図3のような有限の大きさを持つ場合だけでなく、無限に広がりを持っていてもよい。より一般には、最小ノルム問題はアフィン集合へのノルムが最小となる超長方形領域上の点を求める問題である。線形計画問題は最小ノルム問題に帰着できることが知られており、最小ノルム問題は重要な数値最適化問題であると認識されている。

最小ノルム問題の解法は古くから研究されてきた。本研究では、最小ノルム問題を解く新しいアルゴリズムのフレームワークとして、更新・安定化フレームワークを提案した。このフレームワークによって定まるアルゴリズムは、その名前の通り、更新ステップと安定化ステップを交互に繰り返しながら、最適解に近づく点列を逐次的に生成する。更新ステップでは、1次法を用いて、現在の点からのアフィン集合へのノルムの値を減らす。1次法とは関数の1次の微分情報、すなわち勾配ベクトルを利用した連続関数最小化の方法で、Frank-Wolfe法、射影勾配法などが知られている。本研究では、Frank-Wolfe更新、射影勾配更新、座標更新の3つを提案した。一方、安定化ステップは、ある好ましい性質を満たす点(安定点)を求め、このステップは離散的な性質を帯びている。

本研究では、提案したフレームワークに対して理論的な解析を行い、アルゴリズムが要する計算量について、理論的な上限値を得ることができた。また、計算機実験によって提案アルゴリズムのふるまいを詳細に観察し、その結果、提案アルゴリズムが実用的にも優れていることを示すことができた。本研究で提案したアルゴリズムのフレームワークは、離散的な方法と連続的な方法を融合させたものと考えられ、その開発と解析は、先に述べた研究の目的にかなうものである。

##### (2) 線形計画問題に対する最降下規則の単体法に対する理解の深化

単体法は線形計画問題を解く主要なアルゴリズムの一つである。上記の図2に示すように、単体法は、多面体領域の辺をたどって最適解に到達する方法である。図2では多面体領域の右側の辺をたどって最適解に到達しているが、左側の辺をたどって最適解に到達することも考えられる。このように、単体法によって生成される解がどのようなルートをたどるのかは、ピボット規則を決めることによって定まる。これまでいくつものピボット規則が提案されているが、中でも最急降下規則は、実際の問題に適用したときに非常に効率的であることが知られている。本研究では、「最急降下規則の単体法を適用したときにどれだけの頂点をたどるか」ということに関する既存研究を独自の視点から再構成した。それにより、最急降下規則の単体法の性質を浮き彫りにすることができたので、さらなる研究につながることを期待される。

##### (3) 二次計画問題に対する単体法の研究

二次計画問題とは、線形計画問題を含むより広いクラスの問題で、ポートフォリオ最適化問題など、様々な問題が二次計画問題として定式化される。線形計画問題と同様、二次計画問題も単体法によって解くことができるが、その理論的な性質はほとんどわかっていなかった。ここ最近になり、研究代表者の線形計画問題に対する単体法の理論的な性質に関する研究結果を、二次計画問題に拡張した結果が知られるようになった。さらに、二次計画問題に対する最降下規則の単体法の実装結果が発表された。これらの結果に触発され、二次計画問題に対する単体法の理論的な性質を詳細に検討した。それにより、今後の研究への端緒を得ることができた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Satoru Fujishige, Tomonari Kitahara, Laszlo Vegh	4. 巻 -
2. 論文標題 An Update-and-Stabilize Framework for the Minimum-Norm-Point Problem	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Mathemirical Programming	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10107-024-02077-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 藤重 悟、北原 知就、Laszlo Vegh	4. 巻 35
2. 論文標題 最小ノルム点問題に対する更新・安定化による解法のフレームワーク	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 最適化：モデリングとアルゴリズム	6. 最初と最後の頁 38-47
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Satoru Fujishige, Tomonari Kitahara, Laszlo Vegh	4. 巻 24
2. 論文標題 An Update-and-Stabilize Framework for the Minimum-Norm-Point Problem	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the 24th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO XXIV)	6. 最初と最後の頁 142-156
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-031-32726-1_11	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 田野 昌也、宮代 隆平、北原 知就	4. 巻 34
2. 論文標題 最急降下辺規則の単体法の反復回数の上界について	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 最適化：モデリングとアルゴリズム	6. 最初と最後の頁 31-38
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 藤重 悟、北原 知就、Laszlo Vegh
2. 発表標題 An Update-and-Stabilize Framework for the Minimum-Norm-Point Problem
3. 学会等名 研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 北原知就、田野昌也、宮代隆平
2. 発表標題 最急降下規則の単体法の反復回数の上界について
3. 学会等名 研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 北原知就
2. 発表標題 線形計画問題に対するアルゴリズムとその計算複雑度
3. 学会等名 2021年度科研費シンポジウム 機械学習システムの社会実装に向けた次世代最適化技法の研究
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 北原知就
2. 発表標題 A bound for the number of iterations by the simplex method with the steepest-edge rule
3. 学会等名 Workshop on Continuous Optimization and Related Topics
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 北原 知就
2. 発表標題 Steepest-edge 規則を用いた単体法の反復回数の上界と制約行列の条件数の関係について
3. 学会等名 科学研究費 基盤研究(A)「機械学習システムの社会実装に向けた次世代最適化技法の研究」による2019年度ワークショップ
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関