

令和 6 年 6 月 5 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K11852

研究課題名（和文）縮小型事前分布によるベイズ統計的推測の研究

研究課題名（英文）Bayesian statistical inference under shrinkage priors

研究代表者

丸山 祐造（Maruyama, Yuzo）

神戸大学・経営学研究科・教授

研究者番号：30304728

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：多変量正規分布の平均ベクトルの推定問題を考えた。そのパラメータ推定（特に平均）は長い歴史があり、多くの理論的な蓄積がある。尺度母数も未知というより現実的な設定を扱うのが特徴である。特に広義の事前分布のもとでの一般化ベイズ推定量の許容性は、狭義の事前分布のもとでのベイズ推定量の許容性とは違って、十分研究されてこなかった。そのような問題に対して、許容的な推定量を提案した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

データの背後に確率的な構造を想定する統計的モデルは、データから有用な結論を導くために広く使われている手法である。その中でも正規分布モデルは最も基本的であり、まず最初に妥当性が検討される重要なモデルである。正規分布は平均と分散という2つのパラメータで特徴づけられる分布である。そのパラメータ推定（特に平均）は長い歴史があり、多くの理論的な蓄積がある。しかし、その問題設定の簡単さにも関わらず理論的説明が不十分な問題が残されていた。そのような問題に対して、縮小型事前分布のもとでのベイズ推定量が理論的良さを持つことを示した。

研究成果の概要（英文）：Statistical models that assume a probabilistic structure behind the data are widely used to draw useful conclusions from the data. Among these, the normal distribution model is the most basic and the first important model to be examined for validity. The normal distribution is a distribution characterized by two parameters, mean and variance. The estimation of these parameters (especially the mean) has a long history, and there is a great deal of theoretical accumulation. However, despite the simplicity of the problem set-up, there remain problems that have not been fully clarified theoretically. For such problems, we have shown that the Bayesian estimator under a reduced prior distribution has theoretical merit.

研究分野：統計学

キーワード：ベイズ統計学

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

線形回帰モデルは、多変量統計解析を行う上での最も基本的な統計モデルである。また、複雑なデータ構造を表現し得る非線形モデルの中にも、スプライン回帰モデルのように、いくつかの非線形関数の線形結合として表現される例は多い。従って、計算機が高度に発達した現代においても、線形回帰モデルは依然として多変量統計解析の中で重要な位置を占めている。本研究では、理論的立場から線形回帰モデルにおける統計的推測問題を考える。特に、その重要性・有効性が明らかになってきた縮小型事前分布を用いたベイズ統計的推測手法に照準を絞り、統計的決定理論の立場からその良さを解明することが本研究の最大の目的である。特に、推定問題において一般化ベイズ推定量が許容的であるための十分条件について、以前から取り組んでいた未解決問題の解決を目指す。また、近年解明されつつある予測問題におけるスタイン現象の完全な理解を目指す。

### 2. 研究の目的

線形回帰モデルにおける統計的推測問題において、特にその重要性・有効性が明らかになってきている縮小型事前分布をベイズ統計的推測手法に照準を絞る。もちろん回帰分析の文脈では、リッジ回帰分析が縮小型推測手法として、まず想定される。ただし必ずしもリッジ回帰分析だけに焦点を絞らず、縮小型推測手法一般について、いわゆる統計的決定理論の観点から理論的性質を解明していくことが本研究の大きな目的である。本研究では主に、誤差項に正規性を仮定した正規線形回帰モデルを想定する。そして統計的推測として、推定、予測、変数選択を扱う。具体的には、有限個のデータが得られたもとで、以下の典型的な統計的推測の問題設定を考える。

【推定】回帰係数ベクトルの関数の推定，誤差分散の推定

【予測】新たな有限個の説明変数が得られたときに、対応する目的変数に関する予測分布の構成

【変数選択】無駄な変数を含む利用可能な全ての説明変数を与えられていると想定した場合の、データに照らして妥当な説明変数の組み合わせの選択

それぞれにおいて理論的にも実用的にも優れた推測方法の提案を目指す。特に変数選択においては、説明変数の数が非常に多いという現代的な設定にも対応する。

### 3. 研究の方法

前項で「理論的にも実用的にも優れた推測方法の提案を目指す」と書いた。特に私は理論的研究に強みがある。じっくり問題に取り組む時間を作る。

なお、過去に受領した科研費では、本研究テーマと深く関連した研究テーマを扱った。その研究費を使って、アメリカの複数の研究者を訪問して、共同研究を行ってきた。近年の業績の多くがその共同研究の成果である。本研究においても、そのスタイルでの共同研究を継続した。そのため研究費のかなりの部分を旅費に当てる。また、海外の学会、研究会で研究成果を発表し、同分野の専門家と議論することにより、さらに研究を進展させる。その旅費にも研究費を充当した。

### 4. 研究成果

(1) 2019--2022 年度には、主に多変量正規分布の平均ベクトルの推定問題を考えた。特に分散未知という設定は重回帰分析を正準化したケースとなり、現実のデータ解析でも重要である。既存研究と同様に MSE を推定量の性能評価に使う。分散既知の場合と同様にベクトルの次元が 3 以上の場合に標本平均(ベクトル)が非許容的となるスタイン現象が知られている。分散既知の場合には標本平均を改良して許容的な推定量のクラスが知られている。またそのような性質をチェックするための十分条件も整備されている。一方分散未知の場合には、標本平均を改良して許容的な推定量のクラスは、分散パラメータが局外母数となるために取扱が難しく、特に一般化ベイズ推定量で標本平均を改良して許容的な推定量は知られていなかった。

2019 年度：次元が 5 以上を想定した場合にそのような推定量を見つけた。事前分布としては分散パートに不変測度という広義の事前分布を想定し、一方平均パートには既存の研究で多く想定されてきた正規分布の尺度混合分布を想定した。その尺度混合分布の超母数の設定を工夫すると、通常積分の比として表現されるベイズ推定量において積分が解析的に計算できて、極めてシンプルな推定量の最終形を持つことも興味深い。ただし、分散既知の設定に比して一般性に乏しくさらなる研究が必要である。特に平均ベクトルの次元が 3 と 4 の場合への対応が重要と考えている。

2020 年度：次元が 3 以上を想定した場合に許容的な推定量を見つけた。小さな差分だと見られるかもしれないが、理論的には大きな進歩である。事前分布としては分散パートに不変測度という広義の事前分布を想定し、一方平均パートには既存の研究で多く想定されてきた正規分布の尺度混合分布を想定した。その尺度混合分布の超母数の設定を工夫すると、通常積分の比として表現されるベイズ推定量において積分が解析的に計算できて、極めてシンプルな推定量の最終

形を持つことも興味深い。

2021 年度：2020 年度の研究における不変測度とは，指数のベキが-1 のケースである。ベキが-1 でない場合にも許容的な推定量がありうることを見出した。そこでは，分散既知の場合との類似性がなくなり，許容的な推定量の全貌に向けて少し立ち止まらざるを得ない。-1 という不変測度のベキがベストなのかどうかなど，複数の問いを解明すべくさらなる研究が必要である。

2022 年度：少し視点を変えて，私が 1990 年代に研究していた James-Stein を改良する推定量の許容性を研究した。これは一般化ベイズ推定量であり，分散パートに指数のベキが-1 よりも大きい power function という広義の事前分布を想定している。従って，分散既知の場合との類似性がなくなり，扱いが難しい。許容性の証明には適切な狭義事前分布の列の設計が重要であることが分かった。また関連する slowly varying function の性質をさらに追求する必要があるだろう。

(2)

Polson and Scott (2012, Bayesian Analysis) では，sampling と prior の両方に正規分布を想定するベイズモデルにおいて，尺度母数の hyper prior として，half-Cauchy prior の良さが主張されている。その傍証として，多変量正規分布の推定問題において half-Cauchy prior の下でのベイズ推定量の良さ（特に minimaxity）が数値的に検討されている。その根拠が図 1 のようなリスク関数である。ところで，この問題の理論的な取り扱いが講演者の専門分野の一つであるが，実はこの事前分布のもとでのベイズ推定量の minimaxity は十分に研究されてこなかった。尺度母数を変数変換したとき U 字型になり，continuous spike and slab prior と見なせるのが half-Cauchy prior の大きな特徴である。しかし，U 字右側の発散が，minimaxity を理論的に証明する際の典型的な道具として用いられてきた部分積分を妨げるのである。2023 年度の研究では部分積分を工夫して，half-Cauchy prior という U 字型事前分布の下でのベイズ推定量の minimaxity について十分条件を与える。このとき，二つの合流型超幾何関数の比を下からバウンドすること，及び統計的決定理論の枠組みにおける数値に基づく結論の厳密さのための基礎的研究を行った。特に区間演算という精度保証付き数値計算が今回の研究テーマに利用可能であり，Python でコードを書いた。

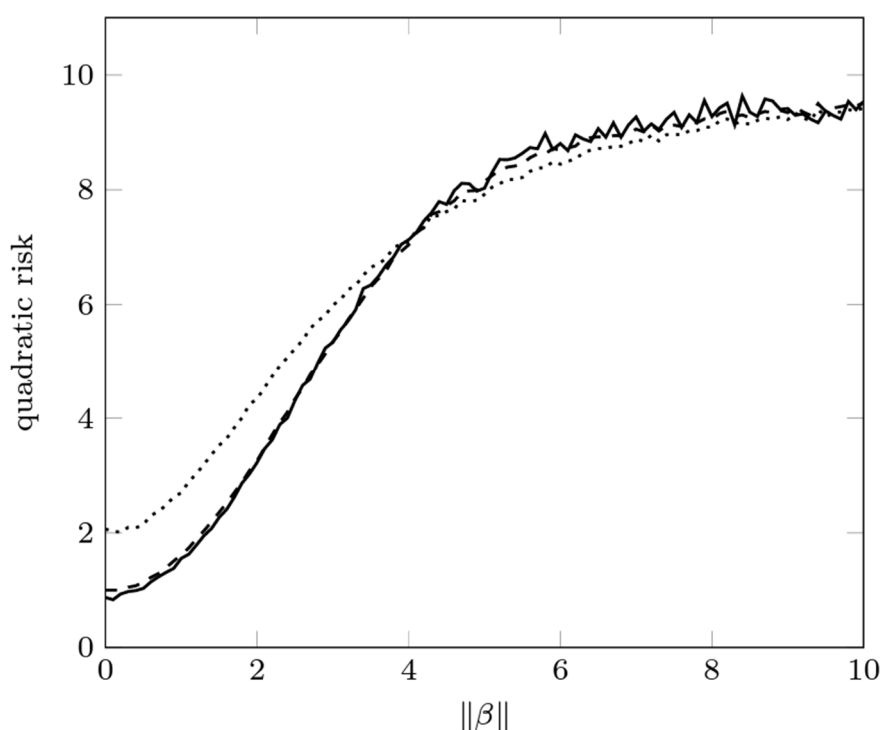


図 1：縮小推定量のリスク関数

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 7件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Maruyama Yuzo, Brown Lawrence D., George Edward I.	4. 巻 11
2. 論文標題 Ensemble minimaxity of James Stein estimators	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Stat	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/sta4.532	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Maruyama Yuzo, Strawderman William E.	4. 巻 222
2. 論文標題 A review of Brown 1971 (in)admissibility results under scale mixtures of Gaussian priors	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Planning and Inference	6. 最初と最後の頁 78 -- 93
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jspi.2022.06.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Maruyama Yuzo, Strawderman William E.	4. 巻 29
2. 論文標題 On admissible estimation of a mean vector when the scale is unknown	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Bernoulli	6. 最初と最後の頁 153 -- 180
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3150/21-bej1453	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Maruyama Y, Strawderman W E	4. 巻 108
2. 論文標題 Admissible estimators of a multivariate normal mean vector when the scale is unknown	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Biometrika	6. 最初と最後の頁 997 ~ 1003
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/biomet/asaa102	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Maruyama Yuzo, Strawderman William E.	4. 巻 48
2. 論文標題 Admissible Bayes equivariant estimation of location vectors for spherically symmetric distributions with unknown scale	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The Annals of Statistics	6. 最初と最後の頁 1052-1071
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/19-AOS1837	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Maruyama Yuzo, Strawderman William E.	4. 巻 211
2. 論文標題 A Gaussian sequence approach for proving minimaxity: A Review	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Planning and Inference	6. 最初と最後の頁 256-270
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jspi.2020.06.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Maruyama Y, Strawderman W E	4. 巻 -
2. 論文標題 Admissible estimators of a multivariate normal mean vector when the scale is unknown	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Biometrika	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/biomet/asaa102	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Maruyama Yuzo, Matsuda Takeru, Ohnishi Toshio	4. 巻 65
2. 論文標題 Harmonic Bayesian Prediction Under $\alpha$ -Divergence	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 IEEE Transactions on Information Theory	6. 最初と最後の頁 5352 ~ 5366
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1109/TIT.2019.2915245	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 丸山 祐造
2. 発表標題 多変量正規分布の平均ベクトルの推定問題における分散未知の場合のミニマクスで許容的な推定量
3. 学会等名 2022年度統計関連学会連合大会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yuzo Maruyama
2. 発表標題 Admissible estimators of a multivariate normal mean vector when the scale is unknown
3. 学会等名 EAC-ISBA 2021（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 丸山 祐造
2. 発表標題 平均ベクトルの推定における分散未知のもとでの許容的でミニマクスな推定量
3. 学会等名 統計関連学会連合大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 丸山 祐造
2. 発表標題 On admissible estimation of a mean vector when the scale is unknown
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yuzo Maruyama
2. 発表標題 Ensemble minimaxity of James-Stein estimators
3. 学会等名 the “New and Evolving Roles of Shrinkage in Large-Scale Prediction and Inference” workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuzo Maruyama
2. 発表標題 Ensemble minimaxity of James-Stein estimators
3. 学会等名 Symposium in Memory of Charles Stein (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Yuzo Maruyama, Tatsuya Kubokawa, William E. Strawderman	4. 発行年 2023年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 130
3. 書名 Stein Estimation	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	分寺 杏介  (Bunji Kyosuke)  (40962957)	神戸大学・経営学研究科・准教授   (14501)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	湯浅 良太 (Yuasa Ryota) (90964487)	統計数理研究所・統計思考院・助教  (62603)	
研究分担者	羽村 靖之 (Hamura Yasuyuki) (00964983)	京都大学・経済学研究科・講師  (14301)	
研究分担者	星野 伸明 (Hoshino Nobuaki) (00313627)	金沢大学・経済学経営学系・教授  (13301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関