

令和 5 年 5 月 22 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K13737

研究課題名（和文）金融市場モデルにおける無裁定条件の研究とその応用

研究課題名（英文）A study of no arbitrage conditions in financial markets and its application

研究代表者

都築 幸宏 (Tsuzuki, Yukihiro)

信州大学・学術研究院社会科学系・准教授

研究者番号：00801599

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では2つの成果を得た。  
ひとつめは3次元Bessel過程に関するperpetuityのラプラス変換の導出である。perpetuityとは拡散過程の経路に関する積分で、積分区間が正の実数全体であるものである。perpetuityの代表的な例であるDufresneのperpetuityやそのtranslated版を含む既存の例をいくつか再現し、さらに新しい結果も得た。  
ふたつめは株式による資金調達の影響を考慮したデリバティブ価格の導出である。応用として経営者に付与されたストック・オプションの評価とバブル・モデルにおけるコール・オプション価格の数値計算手法を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究において学術的・社会的意義が最も大きい成果は、バブル・モデルにおけるデリバティブ価格の新しい数値計算方法の確立である。バブル・モデルは学術的にも金融実務的にも関心が高くデリバティブの価格は数式として導出されているものの、数値計算方法は確立されていなかった。これは対応する偏微分方程式の解に一意性がなく、有限差分法で意図する解を得るためには境界条件に特別な注意が必要であるためである。先行研究では素朴な境界条件しか考えられておらず、整合性が保てない点があったが、本研究ではこの点を改良した。

研究成果の概要（英文）：This study achieves two contributions.

First, the Laplace transforms of some perpetuities of the three-dimensional Bessel process are computed, where a perpetuity is an integral functional of a diffusion whose integral range is the whole of positive real numbers. Some new results are obtained, and several established results, such as Dufresne's perpetuity and a particular case of its translated version, are recovered.  
Second, the prices of derivatives for a fundraiser, who buys or sells stock as funding activities, are derived. As an application, pricing executive stock options are considered and a new numerical scheme is proposed for call option prices in a market with a bubble.

研究分野：数理ファイナンス

キーワード：Option pricing financial bubble Black-Scholes equations perpetuity executive stock option funding

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

研究開始当初は、市場参加者間で情報が異なることにより裁定機会が存在するような金融市場モデルを考え、この市場モデルにおける取引戦略やデリバティブ価格を研究することを目的としていた。標準的なデリバティブ理論は均一な投資家を想定し情報の格差は存在せず、裁定機会が存在しないことを前提としている。これに対して近年では、裁定機会が存在する場合の金融市場やそのような市場におけるデリバティブ価格に関する理論の研究が行われ、標準的な理論の枠組みを超えてデリバティブの価格理論が発展している。一方、金融実務では資金調達コストをデリバティブ価格に反映する FVA(Funding Value Adjustment)と呼ばれる調整項が導入されていたが、理論的な正当性が乏しいにも関わらず実務的な要請が優先されていた。このようにデリバティブ理論は発展しているにも関わらず、金融実務の変化に追いつけていない状況を背景として、両者の乖離を縮めることの必要性が生じていた。

## 2. 研究の目的

本研究はこれまで考慮されていなかった要素をデリバティブ価格に織り込み、より信頼できるデリバティブ価格を導出する金融モデルを構築するという、数理ファイナンスの理論発展の一環であり、特にデリバティブ価格に資金調達コストを考慮することで、近年に新たに金融実務に導入された FVA を正当化するモデルを構築することを目的とする。

## 3. 研究の方法

(a)定性的な金融市場の分析、(b)確率微分方程式による金融モデルの構築、(c)モデルにおけるデリバティブ価格の導出が研究方法である。金融のモデリングとは実際の金融市場や実務の中で何が重要であるかを取捨選択する作業であり、(a)では資金調達コストは何に由来するかを検討する。資金調達コストは国債と社債の利回りの差で倒産の可能性に由来すると考えられているが、このことを再考することから研究を始める。次に(b)では、まず一般投資家にとっての資産価格過程を考えたのちに、より多くの情報入手できる経営者にとっての資産価格過程を導出する(正確には半マルチンゲール分解を求める)。これは filtration enlargement という手法を使って行う。最後に(c)でデリバティブの価格を導出する。標準的なデリバティブ価格理論の導出原理は無裁定条件であるが、考案した金融モデルが無裁定であるとは限らない。無裁定でなければ、無裁定条件に替わる導出原理を導入する。

## 4. 研究成果

本研究の研究成果は(1)perpetuity のラプラス変換の導出、(2)資金調達コストを考慮したデリバティブ価格の導出の2点である。(1)と(2)の応用であるバブル・モデルにおけるコール・オプションの計算方法は、当初の予定にはなく資金調達コストを考慮したデリバティブ価格の理論とは直接には関係はないが、前者は保険分野に関連する話題であり算術平均型オプションの価格計算への応用の可能性があること、後者のバブル・モデルは理論的にも実務的にも関心の高いモデルであるため、ともに有意義な研究成果である。なお(2)の研究に着手した時点では FVA を正当化するモデルの構築を目的としたが、得られたモデルの応用として、後述のストック・オプションやバブル・モデルにおけるコール・オプション価格の計算が適切であったため目標を変更した。

### (1) perpetuity のラプラス変換の導出

ここで perpetuity とは拡散過程の経路に関する積分で、積分区間が正の実数全体であるものである。定期的に一定額を永遠に受け取る金融商品を永久年金(perpetuity)といい、ある離散金利モデルにおける永久年金の現在価値の極限が、上述の意味で perpetuity になることから、この分野の研究が始まった。perpetuity の確率分布を調べるのが主な関心であるが、確率分布が明示的にわかる場合は少なく、特定の perpetuity に対して明示的なラプラス変換を導出することを成果とする先行研究が多い。なお必ずしも金利モデルが対応している必要はなく、数学的な関心から研究されている。

本研究では、特に3次元 Bessel 過程に関する perpetuity のラプラス変換を導出した。先行研究で考えられている perpetuity は単調増加(被積分関数が非負)である場合がほとんどであり、ラプラス変換が3次元 Bessel 過程の初期値に関して単調増加、またはそのような場合に帰着できる場合に限り、それに応じて各種のパラメータの許される範囲も限定的である。これに対して本研究ではそのような制限を必要とせず、許されるパラメータの範囲も広い。さらに極限をとることで先行研究のいくつかを再現できるという意味でより一般的・包括的である。これは perpetuity の被積分関数が大きくならないように限定しているため、perpetuity の研究において局所化の手法を確立したといえる。

この研究成果は算術平均型オプションの価格計算理論に応用できる可能性がある。算術平均型オプションでは perpetuity の積分区間を有限確定値に置き換えた確率変数の分布を必要とす

るためである。今後の研究として、本研究で考案した局所化の手法を利用し算術平均型オプションの数値計算問題に関して新たな近似的な手法を確立することが挙げられる。局所化の利点のひとつは近似関数が解析的になるなどの好ましい性質をもつことが期待できることである。

この研究は論文[1]として国際専門誌に掲載済みである。

## (2) 資金調達コストを考慮したデリバティブ価格の導出

本研究では株式による資金調達活動を考慮したモデルの下でデリバティブ価格を導出し、応用として経営者に付与されたストック・オプションの価格計算とバブル・モデルにおけるコール・オプション価格の近似計算を考案した。このモデルでは株価に関する情報しか入手できない一般投資家と株価の情報に加え株式の新規発行(または自社株買い)の情報を入手できるインサイダーを想定し、後者はさらに資金調達額を考慮している(後者を資金調達者と呼ぶ)。

一般に情報の格差がある投資家を考えるようなモデルはインサイダー・モデルとして広く研究されており、有意な情報を有する投資家が裁定取引を行うことができる場合もある。裁定機会が存在する場合は標準的なデリバティブ価格理論が基礎とする無裁定の枠組みに帰着できないため、無裁定条件に替わる導出原理が必要である。本研究においても資金調達に関する情報を利用することができれば裁定機会を得ることができるが、資金調達者の資産価格過程に調達した資金を補正すれば裁定機会は存在しなくなる。このため無裁定を前提とするデリバティブ価格理論を利用できる。このようなモデルの下では一般投資家にとってのデリバティブ価格は従来の価格であり、資金調達者にとってのデリバティブ価格は資金調達額を補正した価格過程を原証券価格とみなした従来のデリバティブ価格になる。さらにある条件の下では後者は前者に近づくことを示した。

このモデルを以下の2つに応用した。

ひとつめは経営者に付与されたストック・オプションの価格計算である。ストック・オプションの評価はアメリカン・オプションにはない固有の難しさがあるが、ここで注目する問題点は、経営者は資金調達に関する情報を得ることができ、株価を吊り上げることを目的として自社株買いをする、または価値を下げたくないために資金調達を躊躇するという誘惑がある点である。このような状況では、株主にとって適切な資金調達に関する意思決定がなされない懸念がある。またストック・オプションは経営者に対する報酬であり給与の一部であり財務諸表に計上される費用であるため、公正な価格評価が必要である。このような問題に対して、本モデルに基づくストック・オプションの価格は調達した金額を考慮している点で、従来の価格よりも適切であるといえる。

ふたつめはバブル・モデルにおけるコール・オプションの価格計算の新しい近似手法の提案である。バブル・モデルとは原証券価格がマルチンゲールではなく局所マルチンゲールであるようなモデルであり、理論的に興味深く実務的にも関心が高い。このようなモデルにおいてもデリバティブ価格はある偏微分方程式の解になるが、終端条件がコール・オプションのペイオフのように線型に増大するような場合には解が一意に定まらない。これらの解の中でコール・オプション価格は最小解になるが、この解を数値的に求める手法は初等的な方法以外知られていない。この問題に対して本研究で得られた資金調達者にとってのデリバティブ価格が、バブル・モデルにおけるコール・オプションの価格に近づくことを利用して、近似解とする。この近似解は数値的な計算方法により実際に計算できる。特に有限差分法で計算する場合に、既存の手法よりも境界条件と終端条件の関係が整合的である点で優れている。

これらの研究はワーキングペーパー[2]としてarXivに公開済みである。

[1] Some perpetual integral functionals of the three-dimensional Bessel process. Tsuzuki, Y. Stochastics and Dynamics, 23(02), 2023: 2350008. 10.1142/S0219493723500089

[2] Pitman's Theorem, Black-Scholes Equation, and Derivative Pricing for Fundraisers. Tsuzuki, Y. arXiv.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Yukihiro Tsuzuki	4. 巻 23
2. 論文標題 Some perpetual integral functionals of the three-dimensional Bessel process	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Stochastics and Dynamics	6. 最初と最後の頁 2350008 1-31
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219493723500089	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 都築幸宏
2. 発表標題 Explicit Laplace Transforms of Perpetual Integral Functionals of the Three-dimensional Bessel Process
3. 学会等名 日本応用数理学会第19回研究部会連合発表会
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------