

令和 4 年 6 月 16 日現在

機関番号：11302

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2021

課題番号：19K14229

研究課題名（和文）数学の文化的な美の感得を促進する教授方法に関する研究

研究課題名（英文）A Teaching Method for Facilitating Learners Appreciation of Cultural Aesthetic Qualities of Mathematics

研究代表者

花園 隼人（Hanazono, Hayato）

宮城教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：60816495

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、数学の「文化的な美」を学習者が感得する教授方法を解明するために、この美を反映した数学的对象として数学的証明、数学的定義（条件）、数学的体系に焦点化した実践的研究を展開した。

数学的定義（条件）と数学的体系についての大学生を対象とした研究では、体系全体を構成する「形式」の同定が困難な場合には体系の一部を図表現で構造化することが有益であること、「形式」として機能する数学的關係の学習経験が重要な役割を担うことが明らかになった。

数学的証明についての中学生を対象とした研究では、形式的証明と非形式的な証明の比較が、暗黙化された数学的証明の「文化的な美」の感得を促進しうることが明らかになった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

理論的に基礎づけられた数学の「文化的な美」及びその感得の促進方法を数学的对象と関連づけて具体化し、さらにその促進方法の有効性を実証的に提示したことは、本研究独自の研究成果である。この成果は、これまで主観的な実践に陥りがちであった「数学の美しさ」に関する教育活動に対して、科学的な基礎を与えるものである。

この「数学の美しさ」に関する実践が広く行われることによって、論理のみでは説明できない数学的証明や定義などの特性を学習者が理解することを助けるとともに、数学学習に関する日本の学習者の最重要課題の一つである学習意欲の低迷の改善に大いに寄与することが期待される。

研究成果の概要（英文）：In order to elucidate teaching methods that allow learners to perceive the "cultural aesthetic qualities" of mathematics, this empirical study focused on mathematical proofs, mathematical definitions (conditions), and mathematical systems as mathematical objects that reflect this kind of aesthetic qualities.

In the research on mathematical definitions (conditions) and mathematical systems with university students, it was found that when it is difficult to identify the "form" that constitutes the entire system, it is beneficial to structure a part of the system with a graphical representation, and that the experience of learning mathematical relations that function as the "forms" plays an important role.

A study with middle school students on mathematical proofs revealed that the comparison of formal and informal proofs can facilitate appreciation of the "cultural aesthetic qualities" of mathematical proofs that are implicit in them.

研究分野：数学教育学

キーワード：数学の美 文化 教授方法 数学的証明 数学的体系 数学的定義（条件） 感得

## 1. 研究開始当初の背景

数学の美しさが、数学を研究する際の重要な動機付けや、研究を発展させる際の価値あるガイドになることが、著名な数学者によって示されてきた。これを受け、数学教育の目標論では 20 世紀初頭の黎明期から今日に至るまで、学習者が数学の美しさを感じることが目指されてきた。その一方で、数学教育研究では、数学者と数学を専攻する大学生・大学院生による数学の問題解決過程を比較する実証的な研究を通して、数学の美しさを感じ得るのは数学者だけであると主張されてきた。この成果に加え、美という概念の主観性が問題視され、数学の美しさの感得を促す教授方法の緻密な議論は、蓄積されてこなかった。

筆者は、数学者による美についての言明と、美を知覚者のもつ主観的な側面と知覚対象のもつ客観的な側面から捉える美学者・竹内俊雄の理論を視座に、美という概念を、美術や絵画など様々な対象で普遍的な美(「普遍的な美」と、時代や文化に依存する美(「文化的な美」)に分類し、「教え上げ」に関する数学的对象のもつ「普遍的な美」の感得を促す教授方法の有効性を、高校生を対象として実証的に示した(花園, 2017)。また、簡潔性などに関する数学の「文化的な美」の感得が促されていると推察される算数科問題解決型授業の参与観察と児童へのインタビューを通して、この授業を通じた美の感得の促進に必要な改善点を明らかにした。

数学の「文化的な美」の感得を促す教授方法については以上のような示唆が得られているものの、その具体的な方法は得られておらず、有効性も確認できていない。すなわち、「どうすれば数学の『文化的な美』の感得を促せるか」という問いの答えは得られていない。この問いに答えることは、数学教育研究上の新たな知見になることに加え、日本の数学教育における根本問題である学習意欲の低迷の改善や、発見的・創造的な思考の涵養に寄与することになる。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、「どうすれば数学の『文化的な美』の感得を促せるか」という問いに具体的に答えるために、この「文化的な美」が顕著に反映されている数学的証明や数学的定義といった具体的な数学的对象に焦点化して、学習者による数学の文化的な美の感得を促す教授方法を解明することである。

## 3. 研究の方法

本研究では、上記の目的を達成するための方法として、教授実験とデータの質的分析を研究方法として採用した。

上述のように、本研究では既に、美学者・竹内敏雄の理論を視座として、数学的对象のもつ「普遍的な美」と「文化的な美」の感得過程に関する理論的仮説を得ている。そして、前者の「普遍的な美」に関して、この理論的仮説に基づいて導出した教授的介入によって高校生による美の感得の促進を試みる教授実験とデータの質的な分析を通して、その介入の有効性を確認している(花園, 2017)。加えて、日本の学習者は数学の「文化的な美」に大きく関連する簡潔性や一般性を志向するという特異性に着目し、その特異性を生じさせていると推察される日本独特の算数・数学科の授業形態である問題解決型授業を「数学の『文化的な美』の感得を促す教授方法」として理論的・実証的に評価した結果、この問題解決型授業では必ずしもこの美の感得を促進しないという結論を得た。したがって、この数学の文化的な美の感得過程を詳細に明らかにするためには、「普遍的な美」と同様に、理論的仮説に基づいて導出した教授的介入を用いてその感得を促進する、教授実験が有効な研究方法であると考えた。

この数学の「文化的な美」は多様な数学的对象に備わっているものであるが、本研究ではこの美を典型的に反映している数学的对象として、数学的証明、数学的定義(条件)、数学的体系の三つに焦点化した研究を展開することとした。

## 4. 研究成果

### (1) 数学の「文化的な美」を反映した数学的对象間の関連性

当初計画では、数学の「文化的な美」を典型的に反映している数学的对象として着目した、数学的証明、数学的定義(条件)、数学的体系の三つについて、それぞれを主たる考察対象とする調査研究を展開することとしていた。それに対して、教育の場における学習者の学習経験の観点から調査計画を再検討したところ、学習者はこれらを独立に扱うことに「不慣れ」であり、これらを切り離して考察対象に位置付けた調査を実施することは、学習者に不自然な思考を強いる可能性があることが示唆された。実際、定義という用語は中学校第2学年の図形領域における証明の学習に位置付けられている。また、中学校及び高等学校数学科において数学的定義が明示的に扱われる学習場面は、この証明の学習のほかに、例えば2次関数のグラフの形として定義されていた放物線が2次曲線(円錐曲線)として再定義される場面のように、新たな数学的体系内における考察対象として扱われる学習場面である。

以上の調査計画に関する理論的検討を経て、本研究では特に、数学的定義(条件)と数学的体

系を関連づけた調査研究を展開することとした。

## (2) 数学的対象の「文化的な美」の感得を促進する方法についての理論的仮説

本研究では、美学者・竹内敏雄による理論を基盤とした理論的考察に基づいて、数学的対象の美を「形式」（下位概念：「同値関係」、「擬同値関係」）、「本質」、「全体」、及び、「発展性」の4観点で捉えており、数学の「普遍的な美」の学習者による感得を促す方法として、次の一連の教授的介入を得ていた。

- ・ (M1) 学習者が解決した問題の条件を変更した問題を学習者に提示し、考察を促すこと
- ・ (M2) 「同値関係」が保存された数学的対象と元の数学的対象の共通点を問うこと
- ・ (M3) 「本質」である「同値関係」が成立する数学的対象の範囲を問うこと
- ・ (M4) 「本質」と「全体」が直観された数学的対象と元の数学的対象の比較を促すこと

一方、本研究課題で焦点化している数学の「文化的な美」については、具体的な促進方法は得られていなかった。そこで、数学の美の感得過程と見なせる数学者や数学教育学者による問題解決過程を再検討したところ、数学の「文化的な美」を特徴づけている簡潔性や一般性といった数学的価値が数学の「普遍的な美」をも同様に特徴づけていることや、その感得過程については「普遍的な美」と「文化的な美」による区分が明示的ではないことが確認された。

以上を踏まえて、本研究では数学の「文化的な美」の学習者による感得を促進する方法として、上記(M1)～(M4)を数学的対象の特性に応じて微調整したものを理論的仮説として採用することとした。

## (3) 形式的証明の「文化的な美」の感得を促進する方法

形式的証明とは、「すでに正しいと認められた事柄を根拠として、数学的な記号や言語を用いて、事柄が成り立つことを演繹的に示すこと」(小松, 2014, p. 112)のように定義される証明であり、日本では中学校第二学年以降に学習の対象や方法になる証明である。本研究ではこの形式的証明を本研究における数学的証明として捉え、中学校第2学年の1ペアを対象とした教授実験を通してその「文化的な美」の感得の促進方法の有効性を実践的に解明した。

調査に先立って理論的な考察によって、形式的証明の「文化的な美」を、本研究における概念枠組みを用いて以下のように捉えることとした。

- ・ 「形式」：形式的証明を構成する「中間命題」(宮崎, 1995, p. 134)の構成要素である推論の間の関係が、全て「総合の方向で演繹的」であるという統一性
- ・ 「本質」：『中間命題』における前件が全てすでに正しいと認められた事柄であること、「構成要素の表現は数学的な記号や言語であること」、及び『中間命題』の構成要素である推論の間の関係が、全て『総合の方向で演繹的』であること(最後の項目は「形式」かつ「本質」として位置づいている)
- ・ 「全体」：学術的に形式的証明が与えられていない命題や一般に公理として仮定される命題を除く全ての命題
- ・ 「発展性」：他領域における説明や経験的に認めた事柄への形式的証明の適用範囲の広がり

この捉え方に基づいた実践的考察では、推論の方向を認識できる調査対象者を選定するための事前調査と、そのような調査対象者による教授的介入下での問題解決過程を観察する本調査を軸とした研究を展開した。本調査で用いた調査課題は、「与えられた1点を通り、与えられた直線に平行な直線の作図の方法を証明すること」である。調査では調査対象者自身による作図方法の証明を促したのち、観察者があらかじめ用意した、別の作図方法及びその証明方法との比較を促した。その結果、教授的介入前には自身が構成した形式的証明に対して「記号の扱い方」以外の質を検討しなかった学習者が、「形式」が成立することによる「文化的な美」を感得するに至った。またこの「文化的な美」については、「形式」が暗黙的に成立している形式的証明のみを対象とした学習では感得し難いことが、学習者に対するインタビューを通して確認された。すなわち、形式的証明の「文化的な美」の感得を促進する方法として、形式的証明と非形式的な証明の比較を学習に取り入れることが、暗黙化された数学的証明の「文化的な美」の感得の促進に寄与しうることが示唆された。

## (4) 「特定の四角形のもつ条件の関係」の「文化的な美」の感得を促進する方法

本研究では、数学的定義(条件)と数学的体系がともに関連する題材として、「特定の四角形のもつ条件の関係」を採用した(図1)。これは数学の雑誌で数学者によって紹介された四角形概念体系であり(浪川, 2015)、数学教育学では数学的探究における定義活動の例示にも用いられているものである(村田, 2019)。この題材は、楕円の性質や図形の双対性を知識として獲得している学習者が考察した場合にその学習活動がより豊かになることが先行研究から示唆されていたことから、本研究では大学4年生の1ペアを調査対象とし、教授実験を通してその「文化的な美」の感得の促進方法の有効性を確認した。この「文化的な美」については、本研究の概念枠組みによって以下のように捉えることとした。

- ・ 「形式」かつ「本質」：関係図の全体に成立する双対性
- ・ 「全体」：凸四角形、円に外接する四角形、円に内接する四角形、隣り合う2組の辺の和が等しい四角形、台形、たこ型、等脚台形、平行四辺形、ひし型、長方形、正方形

・「発展性」：「全体」に挙げた四角形の一部から、より広い範囲への広がり

調査では、はじめに調査対象者に「知っている四角形」を挙げてもらい、それらの関係を示すことを求めた。大学生ペアはどちらも正方形、長方形、ひし形、平行四辺形、台形、等脚台形、たこ型、凹四角形を挙げ、それぞれ「辺の長さ」や「角の大きさ」、「対角線」、「対称性」を観点として、これらの関係をベン図によって表現した(図2～図5)。大学生ペアはこの時点では一つの観点によって四角形を分類することを目指していたが、実際には既に2観点になっているという観察者による指摘を受け、「辺の長さ」と「角の大きさ」の2観点を意識的に採用した分類を構成することとした。そして観察者は、大学生ペアによる台形に関する気づきを掘り下げることによって、これまで関係図に位置付けられなかった台形を(図2～図5)、大学生ペアが図1のように位置づけられるように促した。その結果として、大学生ペアはここまでの関係図で部分的に成立している双対性を、図2～図5を参照しながら同定するとともに、不足している図形として「隣り合う二組の辺の和が等しい四角形」に着目し、図1の外接四角形と台形の間位置づけることができた。以上を踏まえて、数学的定義(条件)と数学的体系の双方に関わる具体的題材である「特定の四角形のもつ条件の関係」について、その「文化的な美」の感得を促進する方法についての示唆として、考察対象とする体系全体を構成する「形式」を学習者が同定することが困難な場合には、その体系の一部を図表現などを用いて構造的に捉えることが有益であること、及び、「形式」として機能する数学的関係(対称性や双対性など)についての学習経験が、「文化的な美」の感得過程で重要な役割を担うことから、この数学的関係に関する「意図されたカリキュラム」を適切に構成することが重要であることが確認された。

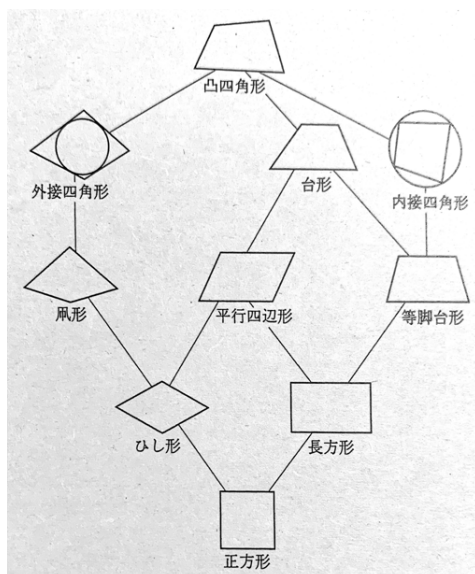


図1 浪川幸彦(2015)『学校数学から見える数学の風景 第11回』, 数学セミナー, 639, p.57.

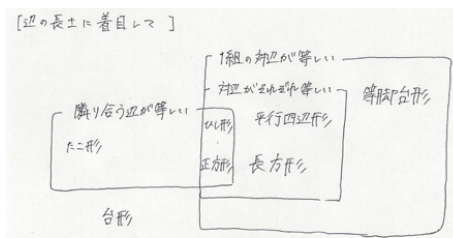


図2

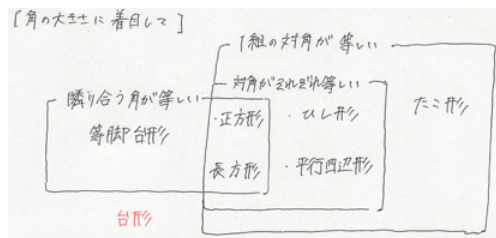


図3

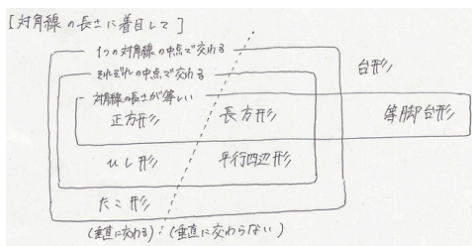


図4

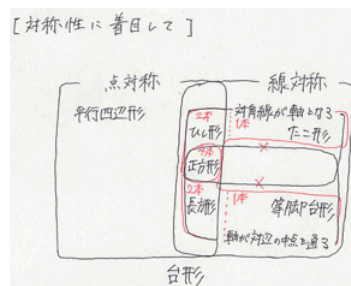


図5

(5) 今後の研究の展望

本研究では具体的な題材，特定の学校・学年における1組の学習者を対象とした調査を通じた経験的考察を行った。今後はこの限定を緩めるような事例研究を展開し，その研究成果の一般性を追試する必要がある。また，主たる教授・学習過程である授業への応用方法について検討することも今後の課題である。

引用・参考文献

- 花園隼人（2017）：数学的対象の美的性質の感得を促す方法に関する事例研究－高校生ペアによる問題解決過程の分析を通して－，日本数学教育学会誌，99，数学教育学論究，臨時増刊，33-40.
- 小松孝太郎（2014）．算数・数学教育における証明指導の改善．東洋館出版社.
- 宮崎樹夫（1995）．学校数学における証明に関する研究：証明に至る段階に説明の水準を設定することを通して．博士学位申請論文，筑波大学．（未公刊）
- 村田翔吾（2019）『数学的探究における定義活動の方法に関する研究』，日本数学教育学会誌，数学教育論究，114，pp.19-38.
- 浪川幸彦（2015）『学校数学から見える数学の風景 第11回』，数学セミナー，639，pp.56-59.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 H. Hanazono	4. 巻 3
2. 論文標題 Facilitating learners' appreciation of the aesthetic qualities of mathematical objects: a cases study on learners' problem solving	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education	6. 最初と最後の頁 24-31
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 花園 隼人	4. 巻 -
2. 論文標題 数学的体系の美的性質の感得過程に関する単一事例研究：大学生ペアによる特定の四角形のもつ条件の関係図の構成過程の分析	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 日本数学会第33回研究発表大会研究発表要旨集	6. 最初と最後の頁 100-103
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 花園 隼人	4. 巻 -
2. 論文標題 形式的証明の美的性質の感得過程を促す方法に関する一考察	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 日本数学会第54回秋期研究大会発表集録	6. 最初と最後の頁 305-308
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 花園 隼人	4. 巻 56
2. 論文標題 現実世界の問題解決を契機とする数学的探究のための教材開発	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 宮城教育大学紀要	6. 最初と最後の頁 29-40
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 H. Hanazono
2. 発表標題 Appreciation of the aesthetic qualities of mathematical objects: an analysis of students problem solving
3. 学会等名 The 14th International Congress on Mathematical Education (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 H. Hanazono
2. 発表標題 Facilitating learners' appreciation of the aesthetic qualities of mathematical objects: a cases study on learners' problem solving
3. 学会等名 The 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 花園 隼人
2. 発表標題 数学的体系の美的性質の感得過程に関する単一事例研究：大学生ペアによる特定の四角形のもつ条件の関係図の構成過程の分析
3. 学会等名 日本教材学会第33回研究発表大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 花園 隼人
2. 発表標題 形式的証明の美的性質の感得過程を促す方法に関する一考察
3. 学会等名 日本数学教育学会第54回秋期研究大会
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------