

令和 6 年 4 月 29 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14494

研究課題名（和文）リフティングを用いた保型表現の分類・構成についての研究

研究課題名（英文）Research on classification and constructions of automorphic representations using liftings

研究代表者

跡部 発 (ATOBE, Hiraku)

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：50837284

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は保型表現の分類と構成である。保型表現とはモジュラー形式を一般化し、より扱いやすくした対象である。特に本研究では、Arthurの重複度公式とその周辺についての知見を深めた。保型表現を具体的に構成する少ない方法の一つにリフティングがあるが、Arthurの重複度公式とはさまざまなリフティングの存在定理を可能な限り一般化したものである。特に、この公式に出てくるうちの最も謎に満ちた対象である局所Aパケットについて、明示的かつ実行可能な構成法を与えたことが本研究の最大の成果である。

また、リフティングの応用として、モジュラー形式の合同問題であるHarder予想の新しい具体例を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

モジュラー形式は豊富な対称性を持つ関数であり、その最も典型的な例は志村・谷山予想により、暗号理論でも活躍する楕円曲線と対応している。この対応によって、フェルマーの最終定理が証明されたのは有名である。本研究の目的はモジュラー形式やその一般化である保型表現を分類・構成することである。

保型表現の分類には、アーサーの重複度公式と呼ばれるものが存在する。しかし本研究の前には、この公式は応用可能な代物ではなかった。本研究において、この公式を詳しく調べることで、多くの応用が得られるところまで辿り着いた。この研究は将来に難解な暗号理論を構築する際に役に立つかもしれない。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research is classification and constructions of automorphic representations. Automorphic representations are a generalization of modular forms. Especially, I studied about Arthur's multiplicity formula and related topics. One of few ways to construct automorphic representations concretely is liftings. Arthur's multiplicity formula is a generalization of several existence theorems of liftings. The greatest achievement of this research is to give an explicit and available construction of the local A-packets, which are the most mysterious objects appearing in Arthur's multiplicity formula.

As an application of liftings, I also gave some new examples for Harder's conjecture, which is a congruence problem on modular forms.

研究分野：保型表現論

キーワード：Jacquet加群 Aubert双対 局所Aパケット Harder予想

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

モジュラー形式とは、豊富な対称性を持つ関数であり、数論において様々な応用を持つ。例えば、Fermat の最終定理が志村・谷山予想を用いて、ある種のモジュラー形式の非存在性に帰着されたのは有名である。保型表現とはモジュラー形式の一般化であり、扱いやすくしたものである。志村・谷山予想の高次元化である Langlands 予想も保型表現と Galois 表現の言葉で書かれる。

高次元のモジュラー形式や保型表現を構成する方法の一つにリフティングと呼ばれるものがある。一昔前まではリフティングは散在的に見つけていたものであったが、現在では Arthur の重複度公式により、リフティングの存在・非存在については抽象的に分かるようになってきている。しかしながら、Arthur の結果は存在定理であり、その具体的な内容についてはほとんど何も分からないという状況であった。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、古典的なモジュラー形式の状況を模倣することにより、リフティングを用いて保型表現を分類・構成することである。特に、Arthur の重複度公式に現れる抽象的な対象を詳しく調べることで、今後様々な応用に対応できるように、この公式を改良することを目指す。

### 3. 研究の方法

(1) 最初に考えていた方法は、古典的なモジュラー形式のリフティングである宮脇リフトを一般化・高次元化することである。宮脇リフトはテータリフトの次のリフティングだと考えることができ、これにより Jiang らによるテータリフトを用いた保型表現の一部の分類・構成を拡張することができるのではないかと目論んでいた。宮脇リフトの一般化は、Cai らによる twisted doubling method の議論によりなされると考えた。

(2) Arthur の重複度公式をより詳しく理解するために、局所 A パケットのより詳しい構造を知る必要が出てくる。局所 A パケットとは、保型表現の局所成分を分類するものであり、これがアーサーの結果の本質的な部分である。これの解明には、Moeglin による明示的構成をより詳しく調べるという手法を取る。

(3) Arthur の重複度公式を高レベルのモジュラー形式の場合に拡張するためには、古典群に対する局所新形式の理論を確立する必要がある。古典群は一般線型群と異なり、カスプ保型表現の中にも生成的でない表現が現れる。そこでまずは一般線型群の局所新形式の理論を生成的でない表現にも適用できるように拡張することを目指す。そのためには、Lapid-Mao による Speh 表現に対する局所 Rankin-Selberg 積分の理論を拡張することから始める。

### 4. 研究成果

(1) 宮脇リフトの一般化は成功しなかった。これは twisted doubling method がかなり高い次元の現象を利用するものであり、組み合わせ論的な難しさが現れることが原因であった。この問題には次の機会に再挑戦するつもりである。

(2) 論文[1]において、 $p$  進古典群の既約緩増加表現の Jacquet 加群の半単純化を、その Langlands パラメーターの言葉で記述することに成功した。この結果は、Moeglin による局所 A パケットの明示的構成を緩増加 L パケットという特別な場合に特殊化することで得られた。この結果が評価され、2021 年に文部科学省から文部科学大臣表彰 若手科学者賞を受賞した。また、2022 年には北海道大学からディスタングイッシュトリチャーの称号を頂いた。この研究はその後の自身の研究の基礎をなすものとなった。

(3) 次に、古典群の既約表現の Zelevinsky-Aubert 双対を計算するアルゴリズムを与えることを目指した。これを計算するために有効な技術は、Jantzen と Minguéz により同時期に与えられた表現の微分という概念である。実際、Jantzen 自身により、表現の微分を計算するアルゴリズム

ムが半分だけ与えられており、そこから一部の既約表現に対しては Zelevinsky-Aubert 双対も計算することができていた。論文[2]では Jantzen による表現の微分のアルゴリズムを全ての場合に適用できるように拡張した。これもまた Moeglin による局所 A パケットの明示的構成を特別な場合に適用することにより得られたものである。

しかしながら、Jantzen-Minguez の表現の微分は万能ではなく、これが計算できても Zelevinsky-Aubert 双対が計算できないような例が存在する。そこで論文[6]では、ウィーン大学の Minguez 教授との共同研究として、局所 A パケットの明示的構成を用いて、表現の微分概念を拡張することにした。これによって、古典群の全ての既約表現に対して、その Zelevinsky-Aubert 双対が計算できるようなアルゴリズムが完成した。

(4) 局所 A パケットの Moeglin による明示的構成は、実際には部分 Aubert 双対という人工的な操作を含んでおり、完全には計算が現実的ではないものであった。しかしながら、[6]における Minguez 教授との共同研究で得られた新しい微分概念を用いることで、Moeglin の構成を修正することができ、論文[4]において、局所 A パケットを単純な組み合わせ的なデータで与えることに成功した。さらに、この計算を SageMath 上で実行するプログラムを書き、公開している。これが本研究における最大の結果と言える。

上記の明示的構成の修正版は様々な応用を持つ。その例として、論文[3]では、ある種の誘導表現の既約性の判定法を与えることに成功した。

(5) レベル 1 の保型表現の分類は Chenevier らによって与えられているが、それを高レベルに拡張するために必要となるのが局所新形式の理論である。論文[5]において、中東工科大学の近藤智准教授と北海道大学の安田正大教授との共同研究として、一般線型群の全ての表現についての局所新形式の理論を確立することに成功した。それまでの先行研究では、1次元の場合を除き、既約表現が生成的であるという仮定が全てに課されていた。一般の次元において、この仮定を外せたのは世界初であると言える。

この研究において、まず Lapid-Mao による Speh 表現に対する局所 Rankin-Selberg 積分の理論を少し拡張した。しかしながら、それだけでは局所新形式の理論を拡張するのに十分な情報は得られなかった。残りの部分については、Lapid-Minguez による ladder 表現に対する行列式公式を用いることで組み合わせ論的な議論に帰着することで得られた。

(6) 最後に桂田氏を中心とした研究グループに参加し、Harder 予想の一部を解決した。これは Arthur の重複度公式を応用してモジュラー形式の新しいリフティングを与えることでなされた。この論文[7]における結果が評価されて、2024年に日本数学会から JMSJ 論文賞を受賞した。

#### <引用文献>

[1] Hiraku Atobe, Jacquet modules and local Langlands correspondence, *Invent. Math.* 219 (2020), no. 3, 831-871.

[2] Hiraku Atobe, On an algorithm to compute derivatives, *Manuscripta Math.* 167 (2022), no. 3-4, 721-763.

[3] Hiraku Atobe, On the socles of certain parabolically induced representations of  $p$ -adic classical groups, *Represent. Theory* 26 (2022), 515-541.

[4] Hiraku Atobe, Construction of local A-packets, *J. Reine Angew. Math.* 790 (2022), 1-51.

[5] Hiraku Atobe, Satoshi Kondo, Seidai Yasuda, Local newforms for the general linear groups over a non-archimedean local field, *Forum Math. Pi* 10 (2022), Paper No. e24, 56 pp.

[6] Hiraku Atobe, Alberto Minguez, The explicit Zelevinsky-Aubert duality, *Compos. Math.* 159 (2023), no. 2, 380-418.

[7] Hiraku Atobe, Masataka Chida, Tomoyoshi Ibukiyama, Hidenori Katsurada, Takuya Yamauchi, Harder's conjecture I, *J. Math. Soc. Japan* 75 (2023), no. 4, 1339-1408.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Atobe Hiraku	4. 巻 26
2. 論文標題 On the socles of certain parabolically induced representations of p-adic classical groups	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Representation Theory of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 515 ~ 541
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/ert/612	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Atobe Hiraku	4. 巻 2022
2. 論文標題 Construction of local A-packets	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)	6. 最初と最後の頁 1 ~ 51
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2022-0030	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Atobe Hiraku, Kondo Satoshi, Yasuda Seidai	4. 巻 10
2. 論文標題 Local newforms for the general linear groups over a non-archimedean local field	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Forum of Mathematics, Pi	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/fmp.2022.17	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Atobe Hiraku, Minguez Alberto	4. 巻 159
2. 論文標題 The explicit Zelevinsky-Aubert duality	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Compositio Mathematica	6. 最初と最後の頁 380 ~ 418
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/S0010437X22007904	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 ATOBE Hiraku, CHIDA Masataka, IBUKIYAMA Tomoyoshi, KATSURADA Hidenori, YAMAUCHI Takuya	4. 巻 -
2. 論文標題 Harder's conjecture I	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1-70
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/87988798	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Atobe Hiraku	4. 巻 167
2. 論文標題 On an algorithm to compute derivatives	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 manuscripta mathematica	6. 最初と最後の頁 721 ~ 763
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00229-021-01285-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Atobe Hiraku	4. 巻 376
2. 論文標題 A theory of Miyawaki liftings: the Hilbert?Siegel case	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 1467 ~ 1535
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-019-01946-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Atobe Hiraku	4. 巻 363
2. 論文標題 On the non-vanishing of theta liftings of tempered representations of $U(p,q)$	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 106984 ~ 106984
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2020.106984	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Atobe Hiraku	4. 巻 219
2. 論文標題 Jacquet modules and local Langlands correspondence	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Inventiones mathematicae	6. 最初と最後の頁 831~871
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00222-019-00918-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計21件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 Hiraku Atobe
2. 発表標題 Computation of local A-packets in Sage
3. 学会等名 Workshop on "Arthur packets and related problems" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 Local newforms for unramified odd unitary groups
3. 学会等名 2022年日本数学会秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 古典群のladder表現について
3. 学会等名 Langlands and Harmonic Analysis 第6回
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 局所A-パケットの構成について
3. 学会等名 早稲田大学整数論セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 Construction of local A-packets
3. 学会等名 Automorphic Forms, Geometry and Arithmetic (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 Local newforms for $GL(n)$
3. 学会等名 金沢整数論オータムワークショップ 2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 On the socles of certain parabolically induced representations of p-adic classical groups
3. 学会等名 Seminar on Representation Theory and Algebraic Geometry, in The Weizmann Institute of Science (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 Local newforms for $GL(n)$
3. 学会等名 Sheffield Number Theory Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 On the socles of certain parabolically induced representations of p-adic classical groups
3. 学会等名 2021 年度表現論シンポジウム
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 The Zelevinsky-Aubert duality for classical groups
3. 学会等名 Seminaire de l'equipe GAGALie, in The University of Poitiers (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 On the socles of certain parabolically induced representations of p-adic classical groups
3. 学会等名 8th Kyoto conference on automorphic forms
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 p-進シンプレクティック群におけるArthur型の表現の決定
3. 学会等名 京都大学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 古典群の Jacquet 加群について
3. 学会等名 第5回数理新人セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 On Jantzen's algorithm to compute derivatives
3. 学会等名 7th Kyoto conference on automorphic forms
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 The Zelevinsky-Aubert duality for classical groups
3. 学会等名 Seminar ``Representation Theory and Automorphic Forms'', in University of Vienna (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 The Zelevinsky-Aubert duality for classical groups
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「保型形式, 保型表現, ガロア表現とその周辺」(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 The Zelevinsky-Aubert duality for classical groups
3. 学会等名 Seminars, in the University of Utah (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 Construction of local A-packets
3. 学会等名 Automorphic Project & Research Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 Construction of local A-packets
3. 学会等名 Langlands and Harmonic Analysis(第5回)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 Jacquet加群と局所Langlands対応
3. 学会等名 2019年度秋季総合分科会・代数学分科会特別講演（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 跡部 発
2. 発表標題 Introduction to Arthur's multiplicity formula
3. 学会等名 22nd Autumn Workshop on Number Theory（国際学会）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

atobe31 / Local-A-packets <a href="https://github.com/atobe31/Local-A-packets">https://github.com/atobe31/Local-A-packets</a>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
オーストリア	ウィーン大学			
トルコ	Middle East Technical University			