

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 6 日現在

機関番号：32661

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14505

研究課題名(和文) 正規反射的凸多面体に付随する 多項式のunimodal性に関する研究

研究課題名(英文) On the unimodality of delta polynomials of normal lattice polytopes

研究代表者

土谷 昭善 (Tsuchiya, Akiyoshi)

東邦大学・理学部・講師

研究者番号：30836953

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は正規反射的凸多面体の数え上げに関する普遍量である 多項式の性質を調べることである。特に、非負性と呼ばれる、単峰性と実根性の中間の性質に焦点を当てて研究を行った。本研究の主な研究成果は(1)B型対称辺凸多面体の構成および、その 多項式の研究、(2)豊穠順序凸多面体と豊穠鎖凸多面体の構成とその 多項式の研究、(3)局所的アンチブロッキング凸多面体の 多項式の研究、(4)対称辺凸多面体の 多項式の研究である。(1)と(2)では特にその 多項式が 非負となることを示し、(3)と(4)では大部分で 非負となることを示し、さらに 非負に関する予想を提唱した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数え上げに関連する多項式や数列の研究は古典的な組合せ論の問題意識であるが、特に多項式が回文的、つまり係数の列が対称、となるときは単峰性より強い性質である。非負性の研究が最近注目を集めている。格子凸多面体の 多項式の 非負性に関する研究はこれまでほとんどなく、今回の研究において、多くの 非負な 多項式を持つ格子凸多面体を構成でき、今後の 非負性に関する研究の礎ができた。またいくつかの予想を提唱したところ、国内外で取り組む研究者が出てくるなど、格子凸多面体論の研究の方向性を与えることに成功し、今後の発展が期待できる。

研究成果の概要(英文)：The aim of this project is to investigate properties of the delta-polynomials, which are related to counting lattice points, of normal reflexive polytopes. In particular, we focus on gamma-positivity, which is a property between unimodality and real-rootedness. Our results of this project are (1) construction of symmetric edge polytopes of type B and a study on their delta-polynomials, (2) construction of enriched order polytopes and enriched chain polytopes, and a study on their delta-polynomials, (3) a study on the delta-polynomials of locally antiblocking polytopes, (4) a study on the delta-polynomials of symmetric edge polytopes. In (1) and (2), we, in particular, proved the gamma-positivity of the delta-polynomials, and in (3) and (4), for a large class of the polytopes, we proved the gamma-positivity and give a conjecture on the gamma-positivity.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：格子凸多面体 多項式 非負性 反射的凸多面体 正規凸多面体

1. 研究開始当初の背景

オイラーの公式、ピックの公式などにその源流を持つ凸多面体論は、組合せ論の伝統的な分野の1つである。全ての頂点が格子点となっている格子凸多面体に焦点を当てると、組合せ論、可換環論、代数幾何、整数論、最適化問題、統計、そしてミラー対称性といった純粋数学や応用数学の様々な分野との間に美しい関係性が現れる。特に、格子凸多面体に付随する Ehrhart 環は組合せ論、可換環論、代数幾何の3つの分野で重要な役割を担う。

今、 d 次元格子凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ に対し、 (P, t) を次のように定義する：

$$(P, t) = (1+t)^{d+1} (1 + \sum_{i=1}^n |n_i P| t^i)$$

この時、 (P, t) は t に関する多項式であり、その次数は高々 d である。この多項式 (P, t) を P の多項式と呼ぶ。多項式は、その係数の和が付随する格子凸多面体の正規化体積に一致しているなど、格子凸多面体の重要な情報を多く持っている。1980~1990年代には、R. Stanley や T. Hibi によって、様々な多項式の性質が可換環論や代数幾何の手法を用いて発見された。実際、R. Stanley は多項式が付随する Ehrhart 環の h 多項式に一致することに着目し、Cohen-Macaulay 環の理論から、多項式の各係数が非負整数である事を示した。それ以降、多項式は、その係数に関する研究が盛んに行われている。一般に、正整数係数多項式 $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_s t^s$ が単峰であるとは、 $a_0 \dots a_k a_{k+1} \dots a_s$ となる k が存在するときに言う。組合せ論において、ある数え上げに関する多項式がいつ単峰となるか調べることは、基本的な問題となっており、多項式においても多くの研究者がその問題に取り組んでいる。特に、Stanley は可換環論の背景から、

「正規格子凸多面体の多項式の係数の列は単峰になる」

という予想を提唱し、現在に至るまで数多くの研究者がこの問題に取り組んでいる。

数え上げに関連する多項式や数列の研究は古典的な組合せ論の問題意識であるが、特に多項式が回文的、つまり係数の列が対称、となるときは単峰性より強い性質である。非負性の研究が最近注目を集めている。正整数係数 d 次多項式 $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_d t^d$ を考える。 $f(t)$ が実根性を持つとは、その全ての根が実数のときに言う。一方、 $f(t)$ が回文的、つまりは $a_i = a_{d-i}$ がすべての i について成り立つ時、ある整数 $0, \dots, \lfloor d/2 \rfloor$ が一意的存在し、

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} a_k (1+t)^{s-2k} t^k$$

と分解することができる。この $0, \dots, \lfloor d/2 \rfloor$ が非負整数の時、 $f(t)$ を非負であると言う。また $(t) = \sum_{i=0}^d a_i t^i$ を $f(t)$ の多項式と呼ぶ。一般に、非負な多項式は単峰である。さらに $f(t)$ が実根性を持つ非負であり、特に非負な多項式が実根性を持つことと、その多項式が実根性を持つことは同値である。つまり非負性は単峰性と実根性の間の性質であり、特に、実根性を調べる手法として導入されたものである。単峰性や実根性と比べると研究の手法がまだまだ未発達で、非負性の研究は非常に重要視されている。凸多面体、より広く、単体的凸多面体の面に数え上げに関する普遍量である h 多項式の研究において Gal は

「旗単体的球面の h 多項式は非負になる」

という予想を提唱した。こちらの予想は Stanley の単峰予想と比べて研究の手法が少ないため、かなりの部分で未解決である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、正規反射的凸多面体に対し、Stanley の単峰予想と Gal 予想から導かれる予想として

「旗正則単模三角形分割を持つ正規反射的凸多面体の多項式は非負である」

を提唱し、その解決を目指すことである。反射的凸多面体はその多項式が回文的、つまり係数の列が対称となる格子凸多面体であり、旗正則単模三角形分割を持つ正規反射的凸多面体の多項式は旗単体的球面の h 多項式を導く。また正則単模三角形分割を持つ正規反射的凸多面体の多項式は単峰となることが知られている。したがって非負性は単峰性より強い性質であるため、上記の予想は Stanley と Gal の予想から自然と導かれる。格子凸多面体の多項式の

非負性に関する研究はこれまでほとんどなく、研究が進めば、格子凸多面体論において非常に価値のあるものとなる。

3. 研究の方法

格子凸多面体の研究において、有限単純グラフや有限順序集合といった他の組合せ論的研究対象から格子凸多面体を構成し、その凸多面体を付随する組合せ論的研究対象の言葉で調べる方法は多く使われている。本研究では、有限単純グラフや有限順序集合から反射的凸多面体を構成し、

(1)いつ旗正則単模三角形分割を持つか

(2)いつ多項式が非負となるか

という2つの問題を明らかにしていく。この方法により、これまでほとんど知られていなかった非負な多項式を持つ正規反射的凸多面体を発見し、一般の場合への解決を探る。

4. 研究成果

本研究の主な研究成果の詳細を4つ報告する。

(1) B型対称辺凸多面体の研究

有限単純グラフに対し、各辺をA型ルート系と関連させて構成した格子凸多面体として(A型)対称辺凸多面体が知られている。代表者と関西学院大学の大杉氏はこの格子凸多面体の構成方法をB型ルート系に拡張し、B型対称辺凸多面体を構成した。B型対称辺凸多面体は常に反射的とはならないが、その同値条件を完全に決定した。実際、B型対称辺凸多面体が反射的凸多面体となることと、付随する有限単純グラフが二部グラフとなることが同値である。特に、このとき、常に正則単模三角形分割を持ち、よってその多項式は単模である。さらに、B型対称辺凸多面体が反射的の時、いつ旗正則単模三角形分割を持つかも完全に決定した。実際、これは付随する有限単純グラフが弦二部グラフとなることと同値である。最後に、いつこの多項式が非負となるかを調べたが、驚くべきことに、B型対称辺凸多面体が反射的の時、常に非負となる多項式を持つことがわかった。実際は、その多項式、特に多項式が内部多項式と呼ばれる二部グラフに付随する普遍量を用いて表すことに成功し、その系として非負性が示された。この研究は、非負な多項式を持つ格子凸多面体の豊富な類をはじめ構成した結果であり、国内外からの評価も非常に高かった。特に、多項式をある数え上げ関数と関連させて、その非負性を示す方法は新しく、今後の研究の進展に期待できるものとなった。

(2) 豊穡順序凸多面体と豊穡鎖凸多面体の研究

R. StanleyはP分割の観点から、有限半順序集合に付随する2種類の格子凸多面体、順序凸多面体と鎖凸多面体を構成した。特にこの2つの凸多面体はEhrhart同値、つまり同じ多項式を持つことが示された。また旗正則単模三角形分割を持ち、さらに、その多項式はP分割に関するある数え上げで計算できることがわかっている。一方で、J StembridgeはP分割の概念を豊穡P分割に拡張した。豊穡P分割の組合せ論は色々研究されているが、凸多面体との関連はまだわかっていなかった。そこで、関西学院大学の大杉氏との共同研究において、豊穡順序凸多面体と豊穡鎖凸多面体を構成し、この2つが反射的かつEhrhart同値であること、旗正則単模三角形分割を持つこと、そしてその多項式、特にその多項式が豊穡P分割に関するある数え上げで計算できることがわかり、StanleyのP分割と凸多面体の理論を、豊穡P分割へ拡張した。特に、Stembridgeの結果を合わせることで、この2つの凸多面体の多項式が常に非負となることを証明するに至った。

(3) 局所的アンチブロッキング凸多面体の研究

アンチブロッキング凸多面体とは、最適化問題でよく扱われる凸多面体である。局所的アンチブロッキング凸多面体は各象限ではアンチブロッキング凸多面体となっている凸多面体であり、つまり、アンチブロッキング凸多面体をうまく貼り合わせた凸多面体である。関西学院大学の大杉氏との共同研究において、局所的アンチブロッキング凸多面体の多項式を、いくつかのアンコンディショナル凸多面体と呼ばれる、良い局所的アンチブロッキング凸多面体の多項式の平均で計算できることを発見した。特に、上述のB型対称辺凸多面体と豊穡鎖凸多面体はアンコンディショナル凸多面体であり、公式に現れるアンコンディショナル凸多面体がこの2種類のみ局所的アンチブロッキング凸多面体の多項式が非負となることが示された。この結果を用いることで、例えば、双子順序凸多面体や双子鎖凸多面体

の 多項式が 非負となることがわかった．また新しい予想として

「反射的局所的アンチブロッキング凸多面体の 多項式は 非負である」

を提唱した．

(4) (A 型) 対称辺凸多面体の研究

対称辺凸多面体は A 型ルート系と有限単純グラフに付随する格子凸多面体であり，正則単模三角形分割を持つ反射的凸多面体であることが知られている．近年，この対称辺凸多面体の正規化体積と同期現象の代表的な数学モデルである蔵本モデルとの関連が発見され，その正規化体積または 多項式の計算法の研究が重要となった．しかし，完全グラフや完全二部グラフなど，具体的なグラフでの計算はされていたが，その値がグラフのどのような情報を反映しているかなど，全くの不透明であった．その中，関西学院大学の杉本氏との共同研究において，サスペンショングラフ，二部サスペンショングラフといった非常に大きなグラフのクラス（完全グラフと完全二部グラフを含んでいる）において，付随する対称辺凸多面体の 多項式の 多項式がいくつかの内部多項式の平均で表すことに成功し，初めて，グラフの普遍量を用いて 多項式や正規化体積を計算することに成功した．特に，このクラスにおいて， 多項式が 非負となることも分かった．さらに，

「対称辺凸多面体の 多項式は 非負である」

という予想を提唱し，国内外の研究者もこの予想を取り組み始めている．また一般には対称辺凸多面体の 多項式は実根性を持つことはないが，カクタスグラフのサスペンショングラフに付随する 多項式がマッチング生成多項式と呼ばれるグラフの普遍量を用いて計算できることを示し，そのとき， 多項式が実根性を持つことが分かった．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計20件（うち査読付論文 18件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 11件）

1. 著者名 Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 -
2. 論文標題 Castelnuovo Polytopes	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Michigan Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1307/mmj/20216027	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ohsugi Hidefumi、Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 -
2. 論文標題 PQ-Type Adjacency Polytopes of Join Graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete & Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00454-022-00447-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Ohsugi Hidefumi、Shibata Kazuki、Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 55
2. 論文標題 Perfectly contractile graphs and quadratic toric rings	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Bulletin of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1264 ~ 1274
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/blms.12789	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Mori Kenta、Ohsugi Hidefumi、Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 593
2. 論文標題 Edge rings with q-linear resolutions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 550 ~ 567
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2021.11.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ohsugi Hidefumi, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 1
2. 論文標題 Symmetric edge polytopes and matching generating polynomials	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Combinatorial Theory	6. 最初と最後の頁 9
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5070/C61055371	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Tran Tan Nhat, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 359
2. 論文標題 Worpitzky-compatible subarrangements of braid arrangements and co comparability graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Comptes Rendus. Mathematique	6. 最初と最後の頁 665 ~ 674
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/crmath.210	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Hibi Takayuki, Kimura Kyouko, Matsuda Kazunori, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 584
2. 論文標題 Regularity and a-invariant of Cameron--Walker graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 215 ~ 242
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2021.05.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ohsugi Hidefumi, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 66
2. 論文標題 The h^* -Polynomials of Locally Anti-Blocking Lattice Polytopes and Their γ -Positivity	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete & Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 701 ~ 722
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00454-020-00236-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Higashitani Akihiro, Nill Benjamin, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 62
2. 論文標題 Gorenstein polytopes with trinomial h^* -polynomials	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Beitrage zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry	6. 最初と最後の頁 667 ~ 685
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13366-020-00513-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hibi Takayuki, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 11
2. 論文標題 Classification of lattice polytopes with small volumes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 495 ~ 509
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/JOC.2020.v11.n3.a4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Haase Christian, Kohl Florian, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 34
2. 論文標題 Levelness of Order Polytopes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 1261 ~ 1280
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/19M1292345	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 20
2. 論文標題 Edge rings of bipartite graphs with linear resolutions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra and Its Applications	6. 最初と最後の頁 2150163
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219498821501632	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ohsugi Hidefumi、Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 293
2. 論文標題 Nef partitions arising from unimodular configurations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 1791 ~ 1800
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mana.201900347	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ohsugi Hidefumi、Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 26
2. 論文標題 Reflexive polytopes arising from bipartite graphs with γ -positivity associated to interior polynomials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica	6. 最初と最後の頁 59
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00029-020-00588-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hibi Takayuki、Ohsugi Hidefumi、Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 69
2. 論文標題 Integer Decomposition Property for Cayley Sums of Order and Stable Set Polytopes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Michigan Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 765 ~ 778
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1307/mmj/1585792887	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ohsugi Hidefumi、Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 7
2. 論文標題 Enriched order polytopes and enriched Hibi rings	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 48 ~ 68
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-020-00403-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ohsugi Hidefumi, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 237
2. 論文標題 Enriched chain polytopes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 485 ~ 500
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11856-020-2012-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hibi Takayuki, Tsuchiya Akiyoshi	4. 巻 8
2. 論文標題 Odd Cycles and Hilbert Functions of Their Toric Rings	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematics	6. 最初と最後の頁 22 ~ 22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/math8010022	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hibi Takayuki, Tsuchiya Akiyoshi, Yoshida Koutarou	4. 巻 342
2. 論文標題 Gorenstein simplices with a given δ -polynomial	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 111619
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2019.111619	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Okada Soichi, Akiyoshi Tsuchiya	4. 巻 -
2. 論文標題 Two enriched poset polytopes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 arXiv:2003.12271	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計26件（うち招待講演 16件 / うち国際学会 8件）

1. 発表者名 土谷昭善
2. 発表標題 Castelnuovo凸多面体
3. 学会等名 オンライン可換環論セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 土谷昭善
2. 発表標題 Castelnuovo凸多面体
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 土谷昭善
2. 発表標題 グラフに付随するGorensteinトーリックFano多様体
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 土谷昭善
2. 発表標題 Castelnuovo toric varieties
3. 学会等名 特異点論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 土谷昭善
2. 発表標題 Rigid Gorenstein toric Fano varieties arising from finite graphs
3. 学会等名 第42回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Akiyoshi Tsuchiya
2. 発表標題 Castelnuovo polytopes
3. 学会等名 (Polytop)ics: Recent advances on polytopes (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Akiyoshi Tsuchiya
2. 発表標題 Canonical triangulations of enriched order polytopes
3. 学会等名 AlCoVE: an Algebraic Combinatorics Virtual Expedition (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Akiyoshi Tsuchiya
2. 発表標題 Ehrhart theory on adjacency polytopes
3. 学会等名 Mini-Symposium on Lattice Polytopes (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 土谷昭善
2. 発表標題 Perfectly contractile graphs and quadratic toric rings
3. 学会等名 オンライン研究集会 組合せ論と可換環論 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Akiyoshi Tsuchiya
2. 発表標題 Ehrhart theory of locally anti-blocking lattice polytopes
3. 学会等名 12th polymake conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 土谷昭善
2. 発表標題 対称辺凸多面体の体積公式と蔵元モデルとの関係
3. 学会等名 2020年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 土谷昭善
2. 発表標題 対称辺凸多面体とマッチング生成多項式
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 土谷昭善
2. 発表標題 Nef-partitions arising from unimodular configurations
3. 学会等名 特異点論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 土谷昭善
2. 発表標題 Construction of nef-partitions via the technique of Groebner bases
3. 学会等名 東京可換環論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Akiyoshi Tsuchiya
2. 発表標題 Two enriched poset polytopes
3. 学会等名 Oberseminar DIGO: Diskrete Mathematik, Geometrie und Optimierung (Goethe-Universität Frankfurt) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akiyoshi Tsuchiya
2. 発表標題 Two enriched poset polytopes
3. 学会等名 Toric Topology 2019 in Okayama (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akiyoshi Tsuchiya
2. 発表標題 Locally anti-blocking lattice polytopes and their h^* -polynomials
3. 学会等名 Commutative Algebra and Lattice Polytopes (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 土谷 昭善
2. 発表標題 Gamma-positivity in Ehrhart theory
3. 学会等名 Discrete Geometric Structure Seminar (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 土谷 昭善
2. 発表標題 反射的凸多面体とグレブナー基底
3. 学会等名 組合せ論と可換代数オータムセミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akiyoshi Tsuchiya
2. 発表標題 Ehrhart theory and interior polynomials
3. 学会等名 Recent advances in matroids and Tutte polynomials (Hokkaido University) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 土谷 昭善
2. 発表標題 Enriched Hibi rings
3. 学会等名 東京可換環論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 大杉 英史、土谷 昭善
2. 発表標題 Two enriched poset polytopes
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 大杉 英史、土谷 昭善
2. 発表標題 Enriched Hibi ring
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 土谷 昭善
2. 発表標題 格子凸多面体に付随する h^* 多項式と二部グラフに付随する内部多項式
3. 学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA2019), ミニシンポジウム（グラフ理論）（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 土谷 昭善
2. 発表標題 Two enriched poset polytopes
3. 学会等名 COMAセミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 土谷 昭善
2. 発表標題 Cayley sums of lattice polytopes and Oda's question
3. 学会等名 特異点論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関