

令和 6 年 6 月 9 日現在

機関番号：24506

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14506

研究課題名（和文）モノドロミー保存変形を記述する微分方程式の代数解の研究

研究課題名（英文）Study of algebraic solutions of the differential equations determined by isomonodromic deformations

研究代表者

光明 新（Komyo, Arata）

兵庫県立大学・理学研究科・准教授

研究者番号：90760976

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、ある種のモノドロミー保存変形を記述する微分方程式であるガルニエ系の代数解の研究を進めてきた。まずGirand氏のガルニエ系の代数解の研究の一般化を行なった。その後不確定ガルニエ系と呼ばれるクラスについて、DiarraとLorayによる代数解の分類理論により代数解を持つとわかっていて、ある種の不確定ガルニエ系について実際にその代数解を求める研究を行なった。この代数解を求めるために、不確定特異点を許す接続のモノドロミー保存変形を具体的に記述するための見かけの特異点の理論を整備した。その結果、実際にその不確定ガルニエ系の代数解を求めることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

パンルヴェ方程式は19世紀最後の年に発見された非線型常微分方程式である。この方程式は数理物理への応用が見つかって以降、様々な分野の多くの研究者によって研究されてきた。パンルヴェ方程式の特殊解を求めるという問題はパンルヴェ方程式の研究では基本的であり、これまでに多くの数学者・数理物理学者によって取り組まれた。本研究ではパンルヴェ方程式の仲間であるガルニエ系についての特殊解について研究してきた。ガルニエ系はパンルヴェ方程式に比べまだわかっていないことが多く、本研究はガルニエ系の特殊解の研究に新たな進展をもたらしたとともに、得た特殊解を用いたガルニエ系の研究の展開が期待される。

研究成果の概要（英文）：Algebraic solutions of the Garnier systems have been studied. The Garnier systems are non-linear differential equations determined by the isomonodromic deformations of some linear ODEs. First, generalization of Girand's algebraic solution was studied. Next algebraic solutions of irregular Garnier systems, which is corresponding to the isomonodromic deformations of some linear ODEs with irregular singularities. By the classification theorem due to Diarra-Loray, there's a list of irregular Garnier systems which have algebraic solutions. In this list, there was an irregular Garnier system whose algebraic solution was not found. To give that algebraic solution, the theory of apparent singularities was studied. As the result, that algebraic solution was found.

研究分野：代数幾何学

キーワード：モノドロミー保存変形 接続のモジュライ理論 ベクトル束のモジュライ空間 見かけの特異点 不確定特異点

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

Painlevé 方程式とは、微分方程式で定義される新しい超越関数を発見することを目指し、Painlevé, Gambier, Fuchs らによって発見された動く分岐点をもたない (6 種類の) 非線形常微分方程式のことである。一般に Painlevé 方程式の解は超越的である。一方で、各 Painlevé 方程式にはいくつかのパラメータが含まれているが、そのパラメータと初期値を特殊に取ることで、その解が代数的になることがある。このような代数解は、発見当初の動機からは外れるが、いくつかの数学的構造と関係があることがわかっている。例えば、Painlevé VI 型方程式の代数解は Frobenius 多様体、正多面体群、複素鏡映、Grothendieck's dessins d'enfants などとの関係がある。また、一般の超越解を直接扱うことは難しく、代数解を足がかりに Painlevé 方程式の研究を進めることもある。このような理由から代数解の研究はこれまで盛んに行われてきた。その結果 (6 種類の) Painlevé 方程式の代数解については全て分類されるに至った。

一方で Painlevé VI 型方程式のある種の一般化である Garnier 系の代数解については、例えば次のような研究がある。津田氏は、Garnier 系の双有理正準変換を導入し、その固定点を計算することでいくつかの Garnier 系の代数解を発見した。Diarra は、Kitaev の Painlevé VI 型方程式の代数解の構成法を拡張し、いくつかの Garnier 系の代数解を発見した。Girand は、射影平面からある 5 次曲線を除いた空間の上に対数的平坦接続を構成しそれを一般の直線に制限することで、いくつかの Garnier 系の代数解を発見した。特に Diarra と Girand による代数解の構成は、代数曲線や代数曲面の幾何から構成するもので、代数幾何的な構成と言える。

VI 型以外の Painlevé 方程式のある種の一般化である不確定 Garnier 系の代数解については、Corlette-Simpson の factorization や Loray-Pereira-Touzot によるその一般化を基礎にした、Diarra-Loray による分類理論がある。この分類理論により不確定 Garnier 系の代数解は「古典型」と「引き戻し型」に分けられ、引き戻し型の代数解を持つ不確定 Garnier 系の完全なリストが完成していた。このリストの中には、代数解を持つことがわかっているが実際にその解を見つけることができていない方程式があった。

2. 研究の目的

- (1) Garnier 系や不確定 Garnier 系の代数解を代数幾何的に構成することが本研究の目的である。まず Girand は、射影平面からある 5 次曲線を除いた空間の上に対数的平坦接続を構成したが、これを一般化し、 n 次元の射影空間から $2n+1$ 次の因子を除いた空間の上に対数的平坦接続を構成する形で一般化するアイデアがあり、その構成の完成させる。
- (2) Diarra-Loray による不確定 Garnier 系の代数解の分類理論の引き戻し型の代数解のリストについて、まだ代数解を求めることができていない方程式に対して実際にその解を構成する。
- (3) Garnier 系や不確定 Garnier 系はモノドロミー保存変形としての側面を持つ。そのことから接続のモジュライ空間や、ベクトル束のモジュライ空間との関連を持つ。Garnier 系や不確定 Garnier 系の代数解の研究に並行し、これらの方程式の理論の背後にあるモジュライ空間の幾何を探る。

3. 研究の方法

- (1) Girand の代数解の一般化について、 n 次元の射影空間から $2n+1$ 次の因子を除いた空間の上に対数的平坦接続については、Girand のアイデアをそのまま援用する形で構成できる。この対数的平坦接続を下部射影平面上の直線でカットすることによって、射影直線上の線形常微分方程式を得る。またこの直線を動かすことによって線形常微分方程式の族を得る。下の接続の平坦性から、この族がモノドロミーを保存する族であることがわかる。一方で Garnier 系は、ある種の射影直線上の線形常微分方程式のモノドロミー保存変形であり、得たモノドロミー保存族から何らかの Garnier 系を構成することができるのである。しかしこの方法で構成した代数解が、

どのタイプの Garnier 系の解であるか？ また実際に新しい代数解であるか？ という問題が残る。この問題のためにはこの対数的平坦接続のモノドロミー表現を解析する必要がある。まず、下部の n 次元の射影空間から $2n+1$ 次の因子を除いた空間の基本群の構造を調べるために、Zariski の超平面定理と Zariski–Van-Kampen の方法を応用する。Girand の場合と比べて基本群の構造が複雑となり、この基本群の解析が Girand の代数解を一般化する上で鍵となる。

- (2) 不確定 Garnier 系の代数解の研究について、まだ代数解がもたっていない理由は、不確定 Garnier 系は不確定特異点を許す線形常微分方程式の一般化モノドロミー保存変形として定式化されており、その明示的な方程式が得られていなかったためである。モノドロミー保存変形は、線形常微分方程式のモジュライ空間上のベクトル場として理解することができ、このモジュライ空間に座標を与えることによって明示的な方程式を得ることができる。このモジュライ空間に座標を与える研究は大きく二つあり、モジュライ空間と余随伴軌道との関係に着目し、余随伴軌道の座標を利用する方法と、線形常微分方程式の見かけの特異点を用いる方法である。本研究では、ベクトル束の幾何と親和性が高いと思われる見かけの特異点の理論を用いて座標を与えることを試みる。見かけの特異点の理論は確定特異点のみを許す場合には Dubrovin–Mazzocco によって完成されていたが、不確定特異点を許す場合の理論がまだ整備されていない状況であるため、まずはこの理論の整備を試みる。
- (3) Garnier 系や不確定 Garnier 系はハミルトン表示を持つことが知られている。この背後には、対応する接続のモジュライ空間は代数的なシンプレクティック構造を持つことがある。一般に様々な接続のモジュライ空間は Poisson 構造またはシンプレクティック構造が入ることが期待される。Biswas–Logares–Peón-Nieto は枠付き Higgs 束の概念を導入し、そのモジュライ空間がシンプレクティック形式を持つことを示した。この枠付き Higgs 束の類似として、枠付き接続を考えることができる。この枠付き接続のモジュライ空間についてもシンプレクティック構造が入ることを確かめる。

Garnier 系や不確定 Garnier 系はハミルトン表示を持つことから、一般のモノドロミー保存変形についてもハミルトン表示を持つことが期待される。つまり接続のモジュライ空間上の関数としてハミルトニアンが定義できるはずである。稲場-岩崎-齋藤は確定型特異点のみを許す接続のモジュライ空間の精密な構成を行った。そこで、この文脈の中の接続のモジュライ空間上にハミルトニアンを構成することを試みる。

接続はベクトル束と作用素の組みであると考えることができ、その作用素を忘れることで、ベクトル束を得ることができる。つまり接続のモジュライ空間からベクトル束のモジュライ空間への写像を構成することができる。この写像のファイバーは Lagrangian 部分多様体を与えることから、この写像は接続のモジュライ空間を調べる上で重要である。実際には良いモジュライ空間を構成するために安定性接続や安定ベクトル束の概念を導入し、安定接続のモジュライ空間や安定ベクトル束のモジュライ空間に対してこの写像を考察することになる。そこには安定接続の像が安定ベクトル束になるとは限らない、という問題がある。そこでベクトル束の安定性にパラメータを導入し、その族の中に安定接続のモジュライ空間の像が含まれるか？ そこで下部ベクトル束の安定性や自己同型の単純性といった条件が、いつベクトル束が接続を持つのか、ということにどのように関係するのかを明らかにする。

4. 研究成果

- (1) Girand の代数解については、その対応するモノドロミー表現の計算が懸案であったが、これに成功した。その結果、平坦接続によって基本群は無限二面体群によって表現されることがわかり、この結果対応する Garnier 系のタイプがわかり、またこの解が新しい解であることもわかった。この成果を論文としてまとめ、Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse に出版した。
- (2) 見かけの特異点の理論の整備に取り組んだ。Diarra-Loray による不確定特異点を許す場合の見かけの特異点の研究があり、接続のモジュライ空間と曲面の点の Hilbert 概形の間の変換写像を構成されていた。この先行研究に着目し、まずこの写像がシンプレクティック写像であることを示した。さらにこの接続のモジュ

イ空間の上にハミルトニアンを定義し、見かけの特異点を用いたモノドロミー保存変形の明示的記述を与えた。この成果を論文としてまとめ、Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences に出版予定である。

さらにこの見かけの特異点の理論の整備の結果、Diarra–Loray の分類理論における引き戻し型の代数解のリストについて、まだ代数解を求めることができていない方程式に対して、その方程式の明示的記述を与えることができた。その結果この代数解を実際に求めることができた。この成果を論文としてまとめ、Funkcialaj Ekvacioj に出版した。

- (3) インドのタタ基礎研究所の Biswas 氏・稲場道明氏・齋藤政彦氏 と共同で、枠付き接続のモジュライ空間の構成と、このモジュライ空間上にシンプレクティック形式を構成する研究を行った。さらに、(安定) 放物接続のモジュライ空間上の代数関数に関する研究も行い、この研究で得られた結果を応用して、このモジュライ空間がアフィン多様体でないことを示した。この成果を論文としてまとめ、Comptes Rendus. Mathématique に出版した。

稲場-岩崎-齋藤によって構成された確定型特異点のみを許す接続のモジュライ空間に対してハミルトニアンの構成の研究を進めた。接続と Higgs 束の間には類似がある。Higgs 束のモジュライ空間上には Hitchin 可積分系があり、ハミルトニアンを定義することができる。この類似に着目することで、稲場-岩崎-齋藤の接続のモジュライ空間に対してハミルトニアンの構成した。この成果を論文としてまとめ、Journal of the Mathematical Society of Japan に出版した。

フランスのレンヌ第一大学の Loray 氏、齋藤政彦氏と共同で接続のモジュライ空間からベクトル束のモジュライ空間への写像を、特に下部曲線が 5 点付きの射影直線の場合に調べた。まず下部ベクトル束の安定性や自己同型の単純性といった条件が、いつベクトル束が接続を持つのか、ということにどのように関係するかを明らかにした。またこの場合の放物ベクトル束のモジュライ空間の詳細な記述を与えた。これによって弱 del Pezzo 曲面の自己同型を、放物ベクトル束の変換として理解することができることを示した。この成果を論文としてまとめ、Advances in Mathematics に出版した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件／うち国際共著 2件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Komyo Arata	4. 巻 67
2. 論文標題 A Nonclassical Algebraic Solution of a 3-Variable Irregular Garnier System	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 85 ~ 104
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1619/fesi.67.85	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Komyo Arata, Loray Frank, Saito Masa-Hiko	4. 巻 410
2. 論文標題 Moduli space of irregular rank two parabolic bundles over the Riemann sphere and its compactification	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 108750 ~ 108750
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2022.108750	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Komyo Arata	4. 巻 -
2. 論文標題 Description of generalized isomonodromic deformations of rank two linear differential equations using apparent singularities	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 KOMYO Arata	4. 巻 74
2. 論文標題 Hamiltonian structures of isomonodromic deformations on moduli spaces of parabolic connections	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 473 ~ 519
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/83858385	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Biswas Indranil、Inaba Michi-aki、Komyo Arata、Saito Masa-Hiko	4. 巻 359
2. 論文標題 On the moduli spaces of framed logarithmic connections on a Riemann surface	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Comptes Rendus. Math?matique	6. 最初と最後の頁 617 ~ 624
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/crmath.199	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Komyo Arata	4. 巻 30
2. 論文標題 A family of flat connections on the projective space having dihedral monodromy and algebraic Garnier solutions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annales de la Facult? des sciences de Toulouse : Math?matiques	6. 最初と最後の頁 479 ~ 501
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/afst.1682	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Komyo Arata
2. 発表標題 Moduli space of irregular rank two parabolic bundles over the Riemann sphere and its compactification
3. 学会等名 Web-seminar on Painleve Equations and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年 ~ 2023年

1. 発表者名 光明 新
2. 発表標題 Moduli space of irregular rank two parabolic bundles over the Riemann sphere and its compactification
3. 学会等名 城崎代数幾何学シンポジウム 2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年 ~ 2023年

1. 発表者名 Komyo Arata
2. 発表標題 A nonclassical algebraic solution of a 3-variable irregular Garnier system
3. 学会等名 The 3rd Shot of The 13th MSJ-SI "Differential Geometry and Integrable Systems" (Short Communications) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年～2023年

1. 発表者名 Arata Komyo
2. 発表標題 Moduli space of irregular rank two parabolic bundles over the Riemann sphere and its compactification
3. 学会等名 Algebraic Geometry and Integrable Systems 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 KOMYO Arata
2. 発表標題 Description of generalized isomonodromic deformations of rank two linear differential equations using apparent singularities
3. 学会等名 Kobe Seminar on Integrable Systems (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 KOMYO Arata
2. 発表標題 Description of generalized isomonodromic deformations of rank two linear differential equations using apparent singularities
3. 学会等名 Indo-Japan Web-Workshop on Vector Bundles and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 KOMYO Arata
2. 発表標題 A family of flat connections on the projective space having dihedral monodromy and algebraic Garnier solutions
3. 学会等名 Journee Paris-Rennes du GDR EFI (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 KOMYO Arata
2. 発表標題 Hamiltonian structures of isomonodromic deformations on moduli spaces of parabolic connections
3. 学会等名 Mini Workshop on Geometry of Moduli Spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 光明 新
2. 発表標題 Dihedral monodromy を持つ射影空間上の平坦接続の族と Garnier 系の代数解
3. 学会等名 湯布院代数幾何学ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
インド	Tata Institute of Fundamental Research			
フランス	Universite de Rennes 1 (IRMAR)			
ハンガリー	Alfred Renyi institute of Mathematics			