

令和 6 年 6 月 6 日現在

機関番号：14501

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14509

研究課題名（和文）対数的Calabi-Yau多様体の変形と分類

研究課題名（英文）Deformations and classification of log Calabi-Yau varieties

研究代表者

佐野 太郎 (Sano, Taro)

神戸大学・理学研究科・准教授

研究者番号：10773195

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：橋本氏との共同研究で、第2ベッチ数が任意に大きくなるケーラーでないカラビヤウ多様体の例を構成した。また、そのような例を任意次元でも構成し、その代数次元を求めた。さらに、K3曲面とアーベル曲面のうち3次元PLT CY対の境界として現れるものの双有理有界性を証明した。Tasin氏との共同研究で、ほとんどの指数1の重み付Fano超曲面はK-安定であることを示した。その応用として、Liu氏、Tasin氏との共同研究で、奇数次元の球面上で無限個の佐々木-アインシュタイン計量の族を構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ケーラーでないカラビヤウ多様体の例の構成は代数幾何的手法に基づいて複素幾何的に興味深い例の構成に成功しており、広く興味深いと思われる。また、双有理有界性を証明したK3曲面やAbel曲面は長年研究がなされてきた対象であり、学術的に一定の価値がある。また、Liu氏、Tasin氏との共同研究では代数的な手法を使って微分幾何学の長年の予想を解決した研究として、学術的価値は高いと思われる。

研究成果の概要（英文）：In joint work with Hashimoto, we constructed examples of non-Kähler Calabi-Yau 3-folds with arbitrarily large 2nd Betti numbers. I also constructed such examples in any dimension  $>3$ . We also computed their algebraic dimensions. Moreover, I proved the birational boundedness of K3 surfaces and Abelian surfaces which can appear as boundaries of 3-fold plt CY pairs. In joint work with Tasin, we proved that most of Fano weighted hypersurfaces (of index 1) are K-stable. As an application, in joint work with Liu and Tasin, we constructed infinitely many families of Sasak-Einstein metrics on odd-dimensional spheres.

研究分野：代数幾何学

キーワード：Fano多様体 Calabi-Yau多様体

## 様式 C-19、F-19-1 (共通) s

### 1. 研究開始当初の背景

申請者の専門は数学における代数幾何学である。代数幾何学での主要な研究対象は代数多様体である。代数多様体とは多項式が 0 になる条件で定まる図形のことであり、放物線や円、球面などのほか多種多様な図形が現れる。代数多様体の分類で核となるのは Fano 多様体、Calabi-Yau 多様体、一般型多様体であると考えられており、申請者はこの前半の 2 種類を主に研究している。Fano 多様体は大体次数が低い場合の代数多様体と考えられ、族の有限性などの著しい性質がなりたち興味深い。近年は微分幾何や数理物理との関連も観察されており、裾野の広い研究対象である。Calabi-Yau 多様体は、Fano 多様体より次数的には中間的な存在であるが、楕円曲線、 $K3$  曲面をはじめ、数論なども含め神秘的な対象として多くの研究がなされてきた。

申請者は博士課程において特異点を持つ Fano 多様体の変形を研究し、特に 3 次元末端特異点のみ持つ Fano 多様体の変形に障害がないことを示した。また、特異点の変形が大域的に伸ばせる主張も示していた。それを背景に、Fano 多様体の変形、および関連するトピック(重み付き超曲面上の効果的非消滅予想など)の研究をしていた。近年、複素微分幾何学との関連で、Fano 多様体の  $K$ -安定性が注目されており、Fano 多様体の  $K$ -安定性を調べる問題は興味深い問題である。

Calabi-Yau 多様体は Yau による Calabi 予想の解決以来、3 次元以上のもも注目を集め、また 1990 年代に数理物理学者によってミラー対称性という現象が 3 次元 Calabi-Yau 多様体上の曲線の数え上げに応用できることが見出されて以来、多くの分野の研究者に注目されてきた。申請者は、Calabi-Yau 多様体の分類理論、特にその変形族が有限か否か、という問題に注目している。有限性については、Yau による予想があるものの、Gross による楕円ファイブレーション付きの Calabi-Yau 多様体の(双有理)有限性ぐらいいか evidence と言えるものはない状況であり、さらなる evidence を見つけることにも価値がある。申請者は橋本氏との共同研究において、ケーラーでない Calabi-Yau 多様体の無限個の位相型を構成していた。この例を参考に有限性との関係を理解することも問題として残されていた。また、その例は正規交差 Calabi-Yau 多様体と呼ばれる退化した対象を変形することで得られるが、その退化した Calabi-Yau 多様体の交差部が有限性を持つことも特殊な場合にはわかっており、それを一般的な事実として抽出することも課題として残されていた。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、Fano 多様体、Calabi-Yau 多様体の分類を進展させることである。Fano 多様体は、滑らかなものの族の有限性は証明されているものの、具体的な幾何については多くの問題が残されている。例えば具体例の  $K$ -安定性は近年活発に研究されており、その進展を図るのも目的の一つである。また特異点を持つ  $Q$ -Fano 多様体の分類は 3 次元では未だ程遠いが、Reid 氏、Brown 氏、高木氏をはじめ、多くの試みがなされてきた。本研究では Fano 多様体の変形に着目して分類的に有用な情報を見出すことを試みる。近年発展が著しい  $K$ -安定性の一般的理論を応用して、Fano 多様体の具体例の  $K$ -安定性を調べる。それによって微分幾何の問題への応用も考える。

また、Calabi-Yau 多様体の分類については、有限性がわかっていない。有限か無限か予想ははっきりしない状況でもあるので、その evidence となるものを見つけるのも価値がある。有限性問題に寄与することで、数理物理や微分幾何など幅広い分野への影響があることが期待される。それにあたって Calabi-Yau 多様体の退化を調べることは意義深いと考えられるが、退化の一般的性質を調べるのも目的の一つである。正規交差 Calabi-Yau 多様体の交差部を調べることで、その正規交差多様体の有限性につながることを期待される。また、退化した Calabi-Yau 多様体の一般的性質の解明にもつながると期待される。

### 3. 研究の方法

Fano 多様体の分類を進めるために、特異点を持った Fano 多様体の変形を Hodge 理論などを用いて調べる。また、その応用として  $Q$ -Fano 多様体の種数の上限を得ることを試みていた。 $K$ -安定な Fano 多様体のモジュライ空間を調べるために toric Fano 多様体の例を凸多面体の理論を使って探す予定であった。また、Fano 多様体の  $K$ -安定性を調べるための一般的理論は尾高氏、藤田氏を含む多くの研究者の寄与によって整備されてきた。その道具を具体例に応用することで、 $K$ -安定性を多くの例で証明することを試みる。

Calabi-Yau 多様体の分類を進めるために、正規交差多様体の変形を使って興味深い Calabi-Yau 多様体の例を作る。また、そのために対数変形理論を整備することも考えていた。対数変形理論は加藤氏によるログ幾何の思想を使って、川又-並河氏により、 $d$ -半安定な正規交差多様体で Calabi-Yau 条件を満たし、コホモロジーに関する技術的な条件も満たすものは、変形によって滑らかな多様体ができる、という定理が 90 年代に得られていた。これは 80 年代の Friedman 氏による 2 次元の時の結果の一般化であったが、最近になって Chan-Lenung-Ma 氏により、コホモロジー条件を外した結果が発表された。この結果などを使って橋本氏との共同研究によってケーラーでない Calabi-Yau 多様体を大量に構成していたので、それを推し進めて更なる興味深い例を構成する。

また、正規交差多様体の境界部として現れる、より低次元の「完全交差型 Calabi-Yau 多様体」の有限性も双有理幾何の手法を使って調べる。正規交差多様体が簡単な双対グラフ、特に Tyurin 退化と呼ばれる型の時に有界性を示そうと試みる。

#### 4. 研究成果

橋本氏との 2019 年に発表した共同研究では、ケーラーでない 3 次元 Calabi-Yau 多様体で第 2Betti 数が任意に大きくなって Hodge-de Rham スペクトル系列が退化する代数次元が 1 の例を構成していた。4 次元以上でも、正規交差多様体の変形として第 2Betti 数が任意に大きくなる例を構成することができた。問題となったのは、交差部分に現れる Calabi-Yau 多様体として橋本氏との共同研究では無限位数の自己同型をもつ K3 曲面を採用したが、3 次元以上ではなかなか見つからないことであった。しかし、有理楕円曲面の  $P^1$  上のファイバー積として構成される Schoen の Calabi-Yau 3-fold を高次元化することで、構成に使える「複雑」な同型を持つ「Schoen 型の Calabi-Yau 多様体」を使えば良いことに気づいた。最終的な計算は有理楕円曲面上の Cremona 変換の作用の計算に帰着したので、結局 2 次元での計算で片付いた。この例は  $n-2$  次元の有理的射影多様体上の  $K3$ -束としての構造を持ち、代数次元は  $n-2$  であると計算できた。

また、3 次元 PLT Calabi-Yau 対の既約な境界として現れる  $K3$  曲面、Abel 曲面の双有理有界性も示した。 $K3$  曲面の場合には概略を書いた 2 ページほどのファイルを数年前に書いていたのだが、2019 年度に Moscow, Shanghai, Pohang の 3 都市で開催された研究集会の査読付き報告集のためにそのファイルを膨らませて論文の執筆を開始した。始めて見ると、小木曾氏から双有理有界だが有界でない標準特異点を持った  $K3$  曲面の族の例を教わったり、Jiang 氏から 3 次元 PLT Calabi-Yau 対の定義を  $K_X+D$  が自明なことから数値的自明に拡張した場合のことを聞かれたことをきっかけに、書くことが整理されていった。結局 17 ページの論文となって、無事報告集にも掲載された。主結果としては、3 次元 pl t Calabi-Yau 対  $(X, D)$  で  $D$  が被約かつ既約の場合には、 $D$  は双有理有界性を満たすことが示された。より一般には  $K_X+D$  が数値的自明の時には、 $D$  の双有理有界性が成り立たないのは、 $X$  が  $K3$  曲面や Abel 曲面上の  $Q$ -conic 束と双有理的になる時のみ、ということもわかった。

Tasin 氏との共同研究で重み付き Fano 超曲面の  $K$ -安定性を調べた。具体的には、指数 1 の Fano 超曲面については「重複度補題」という技術的な仮定を置けば、 $K$ -安定であることがわかった。手法は Cheltsov 氏による  $P^n$  の  $n$  次超曲面の対数的標準閾値の計算手法を参考にした。違いとしては、 $P^n$  の超曲面の場合には点からの射影を自由に使えたのが、重み付き超曲面だと自由度が下がることであるが、射影をうまく取り替えることで問題を回避した。また、Fujita 氏と Zhuang 氏の結果を使った議論によって、一般の滑らかな Fano 超曲面は  $K$ -安定であることがわかった。本研究のきっかけとなったのは、2019 年度に本研究費を使って行った Milano 滞在であった。1 週間の滞在の開始時に何気なく申請者から発した問がきっかけとなって共同研究が開始した。そして、コロナ禍中も Zoom で議論を重ね、ようやく 2021 年度にプレプリントが完成しかけた時に Zhuang 氏の論文を読んでいて後者の主張に気づいた。(これも所属大学で該当する論文誌が購読できていたからである。)

Tasin 氏とのプレプリントを arXiv に掲載した後、Liu 氏から「球面上の佐々木-Einstein 計量の構成」に Brieskorn-Pham 型の Fano 超曲面の  $K$ -ポリ安定性が使えることを指摘され、共同研究を開始した。その結果「奇数次元の球面上に佐々木-Einstein 計量の無限個の族が存在する」という Collins-Szekelyhidi の予想を解決できた。また、同様の手法で「Brieskorn-Pham 特異点の link として現れるホモトピー球面上に Einstein 計量が存在する」という Boyer-Galicki-Kollar の予想も解決できた。キーとなるのは、Brieskorn-Phan 型の方程式で定義される重み付き Fano 超曲面の  $K$ -安定性の判定法であったが、これは Tasin 氏とのプレプリントでの命題の証明とほぼ同じ証明でできた。Brieskorn-Pham 型の特異点は整数の組  $(a_0, \dots, a_n)$  によって定まるが、どの  $(a_0, \dots, a_n)$  で  $K$ -安定な超曲面ができるかわかったということである。しかし、具体的に  $K$ -安定になる  $(a_0, \dots, a_n)$  を無限個見つけるには組み合わせ的に複雑な議論が必要であったが、これは数ヶ月は要したが、初等的な議論で片付くことが最終的にはわかった。この研究を通じて、研究打ち合わせの有用性を痛感した。

また、Nottingham 大学のオンラインセミナーの査読付き報告集のため、ケーラーでない 3 次元 Calabi-Yau 多様体の例を再び正規交差多様体の変形として構成した。新しい点としては、交差部分が Abel 曲面になることだが、Chan-Leung-Ma による対数変形理論の一般化を使うことになった。この論文は難解であり、簡潔な証明が得られればと考えている。この論文は依頼されて慌てて書いたものではあったが、最近 Chan 氏のプレプリントで引用されたり、海外の論文セミナーなどでも参考文献の一つになっており、意外と読まれているようである。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Taro Sano	4. 巻 14
2. 論文標題 Examples of non-Kähler Calabi-Yau manifolds with arbitrarily large $b_2$	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Topology	6. 最初と最後の頁 1448-1460
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/topo.12212	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hashimoto Kenji, Sano Taro	4. 巻 27
2. 論文標題 Examples of non-Kähler Calabi-Yau 3-folds with arbitrarily large $b_2$	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Geometry & Topology	6. 最初と最後の頁 131 ~ 152
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/gt.2023.27.131	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Sano Taro	4. 巻 409
2. 論文標題 On Birational Boundedness of Some Calabi-Yau Hypersurfaces	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 839 ~ 855
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-031-17859-7_41	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sano Taro, Tasin Luca	4. 巻 11
2. 論文標題 On K-stability of Fano weighted hypersurfaces	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Algebraic Geometry	6. 最初と最後の頁 296 ~ 317
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14231/ag-2024-010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計14件（うち招待講演 14件 / うち国際学会 9件）

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Construction of non-Kähler Calabi-Yau manifolds by log deformations
3. 学会等名 大阪大学幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Deformations of Fano and Calabi-Yau varieties
3. 学会等名 Algebraic Geometry Workshop in Bologna（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Birational boundedness of some Calabi-Yau hypersurfaces
3. 学会等名 Algebraic Geometry Seminar (Milan)（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Infinitely many families of Sasaki-Einstein metrics on spheres
3. 学会等名 新潟代数シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 On birational boundedness of Calabi-Yau hypersurfaces
3. 学会等名 大阪大学ミラー対称性セミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 球面上の佐々木-Einstein計量
3. 学会等名 幾何学シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Construction of non-Kähler Calabi-Yau manifolds by log deformations
3. 学会等名 Workshop on Complex geometry in Osaka 2022（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 On birational boundedness of some Calabi-Yau hypersurfaces
3. 学会等名 The 1st Algebraic Geometry Atami Symposium（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Construction of non-Kähler Calabi-Yau manifolds by log deformations
3. 学会等名 Japanese-European Symposium on Symplectic Varieties and Moduli Spaces; Sixth Edition (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Construction of non-Kähler Calabi-Yau manifolds by log deformations
3. 学会等名 Online Algebraic Geometry seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Birational boundedness of some Calabi-Yau hypersurfaces
3. 学会等名 Zoom Algebraic Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Birational boundedness of some Calabi-Yau hypersurfaces
3. 学会等名 Tokyo-Kyoto Algebraic Geometry seminar, (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Deformations of Fano and Calabi-Yau varieties
3. 学会等名 Groups, Arithmetic & Algebraic Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Construction of non-Kähler Calabi-Yau 3-folds by log deformations
3. 学会等名 Birational Geometry, Kähler-Einstein metrics and Degenerations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

website of Taro Sano <a href="https://sites.google.com/site/tarosano222/home?authuser=0">https://sites.google.com/site/tarosano222/home?authuser=0</a> Website of Taro Sano <a href="https://sites.google.com/site/tarosano222/home">https://sites.google.com/site/tarosano222/home</a> Website of Taro Sano <a href="https://sites.google.com/site/tarosano222/home">https://sites.google.com/site/tarosano222/home</a> Homepage of Taro Sano <a href="https://sites.google.com/site/tarosano222/home">https://sites.google.com/site/tarosano222/home</a>
---

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件



8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	University of Milan			
米国	Northwestern university			