

令和 6 年 6 月 11 日現在

機関番号：15501

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14513

研究課題名（和文）削除鎖を用いた大域次元が有限な多元環の研究

研究課題名（英文）Research on finite dimensional algebras of finite global dimension using
rejective chains

研究代表者

塚本 真由（Tsukamoto, Mayu）

山口大学・大学院創成科学研究科 ・講師

研究者番号：40832910

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000 円

研究成果の概要（和文）：大域次元が有限な多元環について圏論的な手法を用いて研究を行った。大域次元が有限な多元環である neat 多元環と削除鎖とよばれる部分圏の列の関係について調べた。また、Dlab-Ringel の標準化法についての共同研究では、準遺伝多元環を含むクラスの多元環の構成を与えると同時に、これまで完全圏（アーベル圏）と三角圏で別個に議論されてきた Dlab-Ringel の標準化法を extriangulated 圏で統一的に理解することを可能にした。さらに、傾加群と弱支配次元についての共同研究を実施し、相対 Auslander 多元環が両側強準遺伝多元環となる十分条件を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

大域次元が有限な多元環は多元環の表現論において重要な研究対象の一つであり、リー理論や代数幾何学など関連分野にも現れる。本研究では、削除鎖をはじめとする圏論的な手法を用いて、大域次元が有限な多元環の判定法について考察を行い、大域次元が有限となるための十分条件を複数与えた。ここで得られた十分条件は比較的容易に確認できるため、本研究の成果は大域次元が有限な多元環の研究に寄与があると思われる。

研究成果の概要（英文）：I studied finite dimensional algebras of finite global dimension using categorical methods. I researched the relationship between neat algebras, which are finite dimensional algebras of finite global dimension, and sequences of subcategories called rejective chains. In joint work on Dlab-Ringel's standardization method, we obtained constructions of finite dimensional algebras including quasi-hereditary algebras, and also generalized and unified Dlab-Ringel's standardization method to extriangulated categories. Moreover, I conducted joint work on tilting modules and weak dominant dimension, and we gave a sufficient condition for relative Auslander algebras to be strongly quasi-hereditary algebras.

研究分野：代数学

キーワード：大域次元 準遺伝多元環 削除鎖 強準遺伝多元環 Neat 多元環

1. 研究開始当初の背景

- (1) 大域次元とは多元環の表現論において最も基本的な不変量の一つであり、環の複雑さを測る指標とみなすことができる。大域次元が有限な多元環の導来圏は Serre 関手を持ち、Auslander-Reiten 構造やホモロジー代数的に良い性質を有する。このような理由から大域次元が有限な多元環は盛んに研究されてきた。他方、準遺伝多元環とは、リー環や代数群の表現論からの動機によって研究が開始された大域次元が有限な多元環である。本研究開始前の研究代表者の研究によって、準遺伝多元環の特別なクラスである強準遺伝多元環は削除鎖とよばれる部分圏の列によって特徴付けられることが知られている。
- (2) 準遺伝多元環の構成方法として、次に述べる Dlab-Ringel の標準化法が知られている。準遺伝多元環の標準加群のように振る舞うアーベル圏上の対象の集合を標準化可能集合という。Dlab-Ringel は標準化可能集合を含み拡大で閉じる最小の部分圏の射影生成元の自己準同型多元環として準遺伝多元環が得られることを示した。より一般に、Dlab-Ringel の標準化法によって standardly stratified 多元環を構成できることが知られている。また、完全圏や三角圏においても標準化可能集合が定義され、同様の手法で standardly stratified 多元環の構成が与えられている。
- (3) 大域次元が有限な多元環の中でも特に大域次元が 1 以下の多元環の特徴付けは、遺伝多元環と呼ばれる多元環によって与えられている。しかしながら、大域次元が 2 以下の場合にはこのような特徴付けは知られていない。他方、Ringel によって、強準遺伝多元環の特別なクラスである両側強準遺伝多元環の大域次元は 2 以下であることが示されている。さらに、大域次元が 2 以下ならば強準遺伝多元環となることが本研究開始前の研究代表者の研究によって明らかになっている。そこで、大域次元が 2 以下の多元環はいつ両側強準遺伝多元環となるのか、という問題が生じる。この問題は、研究代表者のこれまでの研究によって、Auslander 多元環及び Auslander-Dlab-Ringel 多元環について解決されている。

2. 研究の目的

- (1) 削除鎖に関する理論の整備を進め、大域次元が有限な多元環と削除鎖の関係を明らかにすること、またどのような多元環が削除鎖を持つのかを調べることを目的とする。
- (2) Dlab-Ringel の標準化法を一般化し、より広い多元環のクラスの構成を与えることが目的である。また、これまで完全圏(アーベル圏)と三角圏で別個に議論されてきた Dlab-Ringel の標準化法を extriangulated 圏で統一的に理解することも目的としている。
- (3) 大域次元 2 以下の多元環と両側強準遺伝多元環の間にどれくらい隔たりがあるのか、という問題について、Auslander 多元環の一般化の一つである相対 Auslander 多元環の場合に答えを与えることが目的である。

3. 研究の方法

- (1) 本研究開始前の研究代表者の研究によって、準遺伝多元環とその特別なクラスである強準遺伝多元環について次の結果が知られている。多元環 A に対して、 A が強準遺伝多元環であること、 A が削除鎖を持つこと、 A が準遺伝多元環であり反射鎖を持つことは全て同値である。そこで、この結果の一般化や多元環が削除鎖を持つための十分条件について考察を行った。
- (2) 従来の Dlab-Ringel の標準化法では、準遺伝多元環の標準加群のように振る舞う対象を用いていたが、mixed stratified 多元環を構成するためには、真標準加群のように振る舞う対象もあわせて考える必要がある。そこで、真標準加群の性質について考察することから研究を開始し、ここで得られた知見を踏まえ混合標準化可能集合を導入した。また、完全圏(アーベル圏)と三角圏でそれぞれに発展してきた Dlab-Ringel の標準化法を extriangulated 圏で統一的に扱うためにはどのような条件が必要かを考察した。
- (3) Crawley-Boevey-Sauter によって、大域次元 2 の多元環が Auslander 多元環となるための必要十分条件が傾加群を用いて与えられている。そこで、Auslander 多元環の一般化で

ある相対 Auslander 多元環についても傾加群を用いて調べることを主たる研究の方法とした。また、準遺伝多元環を持つ特別な傾加群である特性傾加群との関係についても考察を行った。

4. 研究成果

- (1) (強) 準遺伝多元環を含む大域次元が有限な多元環である neat 多元環と削除鎖との関係について研究を行い、次の成果を得た。多元環 A に対して、 A が弱削除鎖を持つことと A が neat 多元環であり反射鎖を持つことは同値である。この結果は、本研究開始前の研究代表者の研究による削除鎖と準遺伝多元環との関係の類似である。また、削除鎖やその一般化である弱削除鎖を持つ多元環について研究を行った。まず、多元環が弱削除鎖を持つことを単純加群の射影次元によって特徴付けた。この結果を応用することで、中山多元環に対しては、弱削除鎖を持つこと、大域次元が有限となること、neat 多元環となることは全て同値であることを証明した。一般に、弱削除鎖を持つことと neat 多元環であることは独立な条件であり、それぞれが大域次元が有限となるための十分条件である。今回得られた成果により、中山多元環においてはこれらの条件が全て同値であることがわかった。さらに、弱削除鎖を持つための上述の必要十分条件を用いて、多元環が削除鎖を持つための十分条件を与えた。ここで得られた十分条件を遺伝イデアルを持つ中山多元環及び局所的遺伝多元環が満たすことを証明できたので、これらの多元環が強準遺伝多元環であることがわかった。
- (2) 山口大学の足立崇英氏と共同で、Dlab--Ringel の標準化法を一般化し、standardly stratified 多元環を含むクラスである mixed stratified 多元環の構成を与えた。また、これまで完全圏(アーベル圏)と三角圏で別個に議論されてきた Dlab--Ringel の標準化法を extriangulated 圏で統一的に取り扱った。本研究では、extriangulated 圏上に混合標準化可能集合を標準化可能集合の一般化として定義した。従来の標準化可能集合とは異なり、混合標準化可能集合はリジッドとは限らない対象からなる。そのため、Dlab--Ringel の標準化法と同様の手法で射影生成元を構成することができるとは限らない。しかしながら、適切な条件のもとでは普遍拡大を繰り返すことで射影生成元を構成することがわかった。また、extriangulated 圏の混合標準化可能集合から得られた射影生成元の自己準同型多元環として mixed stratified 多元環を構成するためには、Hom 関手の左完全性に対応する条件が必要であることが観察できた。そこで、そのような条件を考えるために extriangulated 圏に付加的な構造を与え、extriangulated 圏においても混合標準化可能集合から mixed stratified 多元環を構成することを可能にした。ここで、extriangulated 圏の混合標準化可能集合に仮定した条件を三角圏の場合に適用すると、三角圏における標準化可能集合で考えられていたものと一致するため、これは自然な条件であるといえる。
- (3) 山口大学の足立崇英氏と共同で、相対 Auslander 多元環が両側強準遺伝多元環となるための十分条件を傾加群を用いて与えた。相対 Auslander 多元環は大域次元が 2 以下かつ弱支配次元が 2 以上の多元環である。そこで、傾加群と弱支配次元の関係について研究を行い、弱支配次元が n 以上であることをある傾加群の存在性によって特徴付けた。今回得られた結果は、傾加群と支配次元の関係について調べた Crawley-Boevey--Sauter や Nguyen--Reiten--Todorov--Zhu の結果の一般化である。さらに、多元環が高次概 Auslander 多元環や高次概 Auslander--Gorenstein 多元環となるための必要十分条件をある傾加群の存在性によって与えた。この結果の応用として、相対 Auslander 多元環が両側強準遺伝多元環となるための十分条件を明らかにした。今回得られた十分条件は、特性傾加群とよばれる準遺伝多元環の構造から定まる特別な傾加群を用いて与えられる。さらに、Auslander 多元環が両側強準遺伝多元環となる特徴付けを新たに傾加群を用いて与えた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Mayu Tsukamoto	4. 巻 65
2. 論文標題 Characterizations of right rejective chains	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Canadian Mathematical Bulletin	6. 最初と最後の頁 557 ~ 570
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4153/s0008439521000540	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Adachi Takahide、Tsukamoto Mayu	4. 巻 72
2. 論文標題 Tilting modules and dominant dimension with respect to injective modules	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 The Quarterly Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 855 ~ 884
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/qmath/haaa050	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Adachi Takahide、Tsukamoto Mayu	4. 巻 594
2. 論文標題 Hereditary cotorsion pairs and silting subcategories in extriangulated categories	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 109 ~ 137
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2021.11.029	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mayu Tsukamoto	4. 巻 237
2. 論文標題 Strongly quasi-hereditary algebras and rejective subcategories	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 10 - 38
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/nmj.2018.9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 ADACHI TAKAHIDE、ENOMOTO HARUHISA、TSUKAMOTO MAYU	4. 巻 174
2. 論文標題 Intervals of s-torsion pairs in extriangulated categories with negative first extensions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	6. 最初と最後の頁 451 ~ 469
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0305004122000354	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Adachi Takahide、Tsukamoto Mayu	4. 巻 641
2. 論文標題 Mixed standardization and Ringel duality	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 546 ~ 586
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2023.11.032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 塚本 真由
2. 発表標題 Cotorsion pairs and silting subcategories in extriangulated categories
3. 学会等名 吹田表現論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 塚本 真由
2. 発表標題 A bijection between silting subcategories and bounded hereditary cotorsion pairs
3. 学会等名 第54回環論および表現論シンポジウム
4. 発表年 2022年

1．発表者名 塚本 真由
2．発表標題 Extriangulated 圏の余ねじれ対と準傾部分圏
3．学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4．発表年 2022年

1．発表者名 塚本 真由
2．発表標題 準遺伝代数について
3．学会等名 第5回岡潔女性数学者セミナー（招待講演）
4．発表年 2022年

1．発表者名 塚本 真由
2．発表標題 A construction of quasi-hereditary algebras
3．学会等名 パーシステントホモロジーと表現論（招待講演）
4．発表年 2023年

1．発表者名 塚本真由
2．発表標題 Intervals of s-torsion pairs in extriangulated categories with negative first extensions
3．学会等名 南大阪代数セミナー（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 塚本真由
2．発表標題 Intervals of s-torsion pairs in extriangulated categories with negative first extensions
3．学会等名 第53回環論および表現論シンポジウム
4．発表年 2021年

1．発表者名 塚本真由
2．発表標題 強準遺伝代数の圏論的特徴付けとその応用
3．学会等名 2021年度大阪市立大学数学研究会特別賞受賞講演（招待講演）
4．発表年 2022年

1．発表者名 Mayu Tsukamoto
2．発表標題 Constructions of rejective chains
3．学会等名 The Eighth China-Japan-Korea International Symposium on Ring Theory（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Mayu Tsukamoto
2．発表標題 Tilting modules and dominant dimension with respect to injective modules
3．学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4．発表年 2019年

1．発表者名 Mayu Tsukamoto
2．発表標題 準遺伝代数について
3．学会等名 整数論・環論合同セミナー
4．発表年 2019年

1．発表者名 Mayu Tsukamoto
2．発表標題 混合階層化代数の構成
3．学会等名 日本数学会2023年度秋季総合分科会
4．発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6．研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--------	---------------------------	-----------------------	----

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------