様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５年　６月１３日現在

機関番号：１２６０８
研究種目：若手研究
研究期間：2019～2022
課題番号：１９Ｋ１４５１５

研究課題名（和文）異なるDynkin型の量子アフィン代数の表現論の間の類似性の研究

研究課題名（英文）Investigation of similarities in representation theory of quantum affine algebras of several different Dynkin types

研究代表者
大矢　浩徳（Oya, Hironori）

東京工業大学・理学院・准教授

研究者番号：９０８３５５０５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,300,000円

研究成果の概要（和文）：研究代表者は，藤田遼氏，David Hernandez氏，Se-jin Oh氏との共同研究で，複素単純Lie環g_1，g_2に対して，それらのunfoldingである複素単純Lie環が等しい場合に，g_1，g_2のそれぞれに対応する量子ループ代数の有限次元表現圏の量子Grothendieck環の間に既約(q,t)-指標を保つ同型が構成されることを証明した．さらにその帰結として，非対称型の場合の既約(q,t)-指標の様々な正値性，g_1，g_2のそれぞれに対応する量子ループ代数の既約(q,t)-指標の間の非自明な関係，B_n(1)型量子ループ代数に関するHernandez予想の証明を導いた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
非対称型量子ループ代数の有限次元表現圏の量子Grothendieck環の構造の研究を，対称型量子ループ代数の有限次元表現圏の量子Grothendieck環と比較するという新しいアプローチから進めた．結果として，適切に対応する型のものを比較すると(q,t)-指標を保つ良い同型が存在することが示され，これまで非対称型の場合に知られていなかった(q,t)-指標の正値性や，B_n(1)型の量子ループ代数の既約表現のq-指標が代数的なアルゴリズムで計算されることが証明された．さらに，非対称型と対称型の量子ループ代数の有限次元表現の間の新たな関係を示唆する，(q,t)-指標の間の関係を導くことができた．

研究成果の概要（英文）：In my joint work with Ryo Fujita, David Hernandez, and Se-jin Oh, we constructed a collection of ring isomorphisms between the quantum Grothendieck rings of monoidal categories of finite-dimensional modules over the quantum loop algebras associated with complex simple Lie algebras g_1 and g_2 under the assumption that the complex simple Lie algebra defined as the unfolding of g_1 coincides with that of g_2. As its application, we deduced several new positivity properties of the simple (q,t)-characters of non-symmetric types, non-trivial birational relations among the simple (q,t)-characters of quantum loop algebras associated with g_1 and g_2, and the affirmative answer to Hernandez's conjecture for the quantum loop algebra of type B_n(1).

研究分野：表現論

キーワード：量子ループ代数　有限次元表現論　量子Grothendieck環　q-指標　クラスター代数

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

１．研究開始当初の背景

量子ループ代数はループ Lie 環の普遍展開環を q-変形した Hopf 代数として，Drinfeld，Jimbo によって'80 年代の中頃に導入された．ここでループ Lie 環とは，複素単純 Lie 環に１変数ローラン多項式環をテンソルして得られる無限次元 Lie 環である．量子ループ代数の有限次元表現論は量子 Yang-Baxter 方程式のスペクトルパラメータ付きの非自明な解を構成する代数的な枠組みであるということに動機づけられ，現在までに様々な研究が行われている．例えば既約表現の分類はl-最高ウェイト理論としてChari-Pressleyによって'90年代前半に行われた．一方で，各既約表現の次元や指標(q-指標と呼ばれる)を求めるという基本問題は現在でも難しく，その一般公式は存在しない．また，量子ループ代数の有限次元表現圏はアーベルテンソル圏として半単純でもなければ一般にはブレイディングも存在せず，その構造は現在もよく理解されていない点が多い．

量子ループ代数は複素単純 Lie 環 g を指定するごとに定まるが，g の型が対称型であるときは非対称型である場合に比べて，有限次元表現論の理解が進んでいた．g が対称型の場合，Nakajima 氏により次数付き箙多様体を用いる幾何学的考察から標準表現の q-指標の t-変形(=(q,t)-指標)が導入され，そこから Kazhdan-Lusztig アルゴリズムと呼ばれる代数的なアルゴリズムによって既約表現の q-指標の t-変形である既約(q,t)-指標が計算されることがわかっていた．このため，Kazhdan-Lusztig アルゴリズムで既約(q,t)-指標を求め，その後変形パラメータの t を１に特殊化することで，既約表現の q－指標が求められるという状況であった．非対称型の場合にも，Hernandez 氏によって，純代数的に標準表現の(q,t)-指標が定義され，そこから Kazhdan-Lusztig アルゴリズムを考えることで，標準表現の(q,t)-指標によって貼られる空間(=量子 Gtrothendieck 環)のある基底が得られることがわかっていたが，純代数的な構成からはこの基底の元(これも仮に既約(q，t)-指標と呼ぶ)が t=1 で実際の既約表現の q-指標に一致することは証明できず，この一致は 2002 年以来の予想となっていた(Hernandez 予想)．

一方で，$(X, Y)=(A_{2n-1}^{(1)}, B_n^{(1)})$，$(D_{n+1}^{(1)}, C_n^{(1)})$，$(E_6^{(1)}, F_4^{(1)})$，$(D_4^{(1)}, G_2^{(1)})$としたとき，X 型と Y 型の量子ループ代数の有限次元表現圏(それぞれ C_X，C_Y と書く)の間には密接な関係があることが，多くの研究者によって観察され始めていた．ここで，X 型は対称型であるのに対し，Y は非対称型であることに注意する．例えば，Kashiwara-Oh，Oh-Scrimshaw によって，C_X と C_Y からそれぞれ(同型を除いて)有限個の基本表現を含む適切なアーベルテンソル部分圏を抜き出すことで，それらの Grothendieck 環の間に既約表現のクラスを保つ環同型が存在することがわかっていた(この部分圏らは後に Naoi 氏によって，圏同値であることが示された)．また，$(X, Y)=(A_{2n-1}^{(1)}, B_n^{(1)})$の場合には，研究代表者と Hernandez 氏との共同研究において，これらの部分圏の量子 Grothendieck 環の間にも，既約(q,t)-指標を保つ同型が存在することが示されていた．さらに，$(X, Y)=(A_{2n-1}^{(1)}, B_n^{(1)})$の場合，Kashiwara-Kim-Oh によって，(同型を除いて)無限個の基本表現を含む十分大きな C_X，C_Y のアーベルテンソル部分圏の通常の Grothendieck 環の間に，既約表現のクラスを保つ環同型が存在することがわかっていた．そこで，研究代表者は上記の類似性の研究を進めることで，従来の非対称型(Y 型)の量子ループ代数の研究において足りなかった情報を，対応する対称型(X 型)の量子ループ代数の表現論を用いて補い，非対称型の量子ループ代数の表現論の理解を進めるという構想を抱いた．実際に，上に述べた研究代表者と Hernandez 氏によって示された量子 Grothendieck 環の間の同型と，Kashiwara-Oh によって証明された通常の Grothendieck 環の間の同型を比較することで，上記の有限個の基本表現を含む $C_{B_n^{(1)}}$の部分圏においては，Hernandez 予想が証明されることがわかっていた．

２．研究の目的

本研究の目的は，１に述べた X 型と Y 型の量子ループ代数の有限次元表現圏の間に見られる類似性を定式化して証明することで，量子ループ代数の有限次元表現論に新たな知見を与えることである．対称型である X 型の場合には幾何学的な考察から良い性質が多く知られているため，これを用いて非対称型である Y 型の量子ループ代数の有限次元表現論の理解を深めることが目標である．特に，既約表現の q-指標の計算可能性を導く Hernandez 予想の解決を目指す．また長期的には，C_X と C_Y の間の(適切な部分圏を指定したうえでの)圏同値，およびそうした圏同値が見られる根源的な理由を明らかにすることを目標とする．
本研究課題ではその第一段階として，Grothendieck 環および量子 Grothendieck 環レベルでの同型の構成を目標とした．

３．研究の方法

C_X と C_Y の間の類似性を研究するにあたっては，C_X と C_Y の圏論的な構造を直接調べるという方法と，(量子)Grothendieck 環を代数として純代数的に研究するという方法が考えられる．通常の Grothendieck 環とその既約表現のクラスを調べるにあたっては，C_X と C_Y の圏論的な構造を直接比較する方法が有効であり，そのうち現在最も強力な方法の１つが Kang, Kashiwara, Kim, Oh らによって発展した一般化量子アフィン Schur-Weyl 双対性を用いるものである．実際１で言及した，通常の Grothendieck 環の間の既約表現のクラスを保つ環同型の結果は，全てこの手法をもとに得られている．一方で，量子 Grothendieck 環はその定義が純代数的であるがゆえに，C_X と C_Y を調べるだけでは得られない情報もあり，純代数的な研究手法が有効である．実際，１に述べた研究代表者と Hernandez 氏による量子 Grothendieck 環の間の既約(q,t)-指標を保つ同型は量子クラスター代数構造に着目した純代数的手法によって得られている．

そこで，本研究課題では Hernandez 氏との共同研究で培った手法が通用することが予想される C_X と C_Y の量子 Grothendieck 環の間の既約(q,t)-指標を保つ同型の構成を目指す．ここでは，再び純代数的なアプローチとしてそれぞれの量子クラスター代数構造に着目する．実際，これらの量子 Grothendieck 環は量子クラスター代数構造を持つ十分大きな部分代数を含むことが知られている．ここで，クラスター代数とは Fomin-Zelevinsky によって'00 年代前半に導入された抽象的な代数系であり，量子クラスター代数はその非可換変形として Berenstein-Zelevinsky によって 2005 年に導入されたものである．この代数系の特徴はクラスター変数と呼ばれる代数の生成元たちを，初期データからあるアルゴリズムによって無限に作る手続き(変異と呼ばれる)が与えられていることにある．特に，変異で移りあう 2 つの初期データから定まる(量子)クラスター代数らは，その定義から直ちに同型になることが従う．そこで，量子 Grothendieck 環の部分代数として現れる量子クラスター代数構造の間に変異で移りあう関係を見出すことで同型を構成し，さらにそれを量子 Grothendieck 環全体の同型に延長するという手法が基本方針となる(さらに，この同型が既約(q,t)-指標を保つということも証明する必要がある)．

こうして，量子 Grothendieck 環側で純代数的に既約(q,t)-指標を保つ同型を構成し，これが変形パラメータの t を１にすることで，一般化量子アフィン Schur-Weyl 双対性を用いて得られている通常の Grothendieck 環の同型に特殊化されるということを証明することで，非対称型の問題を対称型に移し，対称型の場合の Nakajima 氏による結果を用いて，Hernandez 予想を証明するということを考える．

４．研究成果

研究代表者は，藤田遼氏，David Hernandez 氏，Se-jin Oh 氏との共同研究で，複素単純 Lie 環 g_1，g_2 に対して，それらの unfolding として現れる複素単純 Lie 環が等しい場合，g_1，g_2 のそれぞれに対応する量子ループ代数の有限次元表現圏の量子 Grothendieck 環の間に既約(q,t)-指標を保つ同型が構成できることを証明した．この同型は g_1, g_2 のそれぞれに対して，Q-データと呼ばれるデータを取るごとに構成されるものである．上記の g_1，g_2 の例として，A_{2n-1}型と B_n 型，D_{n+1}型と C_n 型，E_6 型と F_4 型，D_4 型と G_2 型という複素単純 Lie 環の組が挙げられるため，これにより上記の C_X，C_Y の量子 Grothendieck 環の間に既約(q,t)-指標を保つ同型が構成できることが導かれた．ここで Q-データには様々な取り方があるため，それに応じて同型の取り方にも非自明な自由度があることに注意する．これは当初想定された以上の結果となった部分である．

上記の結果より，非対称型(Y 型)の場合の既約(q,t)-指標の積の構造定数と対応する対称型(X 型)の場合の既約(q,t)-指標の積の構造定数は適切な部分を見れば一致しているということがわかる．対称型の場合にはこの構造定数は正値性を持つことが Varagnolo-Vasserot，Nakajima の結果により知られていたため，結果として，非対称型の場合の既約(q,t)-指標の積の構造定数の正値性が直ちに導かれる．非対称型の場合の構造定数の正値性はこれまで予想であったが，これにより予想は肯定的に解決された．

さらに(X, Y)=(A_{2n-1}^(1), B_n^(1))の場合に，我々の構成した C_X，C_Y の量子 Grothendieck 環の間の同型が t=1 で，1 で言及した Kashiwara-Kim-Oh による C_X，C_Y の通常の Grothendieck 環の間の既約表現の q-指標を保つ同型に特殊化されることを証明した．この結果として B_n^(1)型量子ループ代数に対する Hernandez 予想が一般に証明された．これは，非対称型の場合に一般に Hernandez 予想が証明された初めての例である．

我々の結果の同型の構成において重要な点の１つは，g_1=g_2 とした場合でも，異なる 2 種類の

Q-データをとれば，非自明な量子 Grothendieck 環の自己同型を与えるという点である．この非自明な自己同型の存在は g_1=g_2 が対称型の場合には Hernandez-Leclerc によって知られていたが，この自己同型が既約(q,t)-指標を保つものであるかどうか，あるいは非対称型の場合にも同様の自己同型が存在するかどうかは知られていなかった．我々の同型は g_1=g_2 を非対称型としても構成され，また一般に既約(q,t)-指標を保つことがわかっているため，結果として Hernandez-Leclerc の結果の拡張，精緻化が与えられた．これも当初は想定されていなかった結果である．
以上の結果は論文[J. Reine Angew. Math. 785 (2022), 117--185]として出版されている．

上記のような g_1, g_2 に付随する量子 Grothendieck 環のある部分代数には，量子クラスター代数構造がそれぞれ定まることが知られているが，研究代表者は引き続き藤田遼氏，David Hernandez 氏，Se-jin Oh 氏との共同研究で，これらの量子クラスター代数構造が(適切な意味で well-defined な)無限回の変異列を通して互いに移りあうことを観察した．これにより，g_1, g_2 に付随する量子 Grothendieck 環の間にクラスター代数構造に由来する同型が構成できるということが導かれた．そこで，我々はこのクラスター代数構造に由来する同型が，上で構成した Q-データの選択から定まる同型に一致することを証明した．この帰結として，非対称型の場合の既約(q,t)-指標の表示の正値性や，クラスター単項式に対応する既約表現に対応する(q,t)-指標が t=1 で q-指標に特殊化されることが証明された．さらにこれを用いて，g_1，g_2 に対する量子ループ代数の既約(q,t)-指標らがある種の有理変数変換で移りあうという事実も証明された．これは，これまで知られていなかった X 型と Y 型の量子ループ代数の既約表現の間の関係を示唆するものであり，今後より深い理解を目指すべき現象であると思われる．
以上の結果は論文としてまとめ，現在投稿中である．

本研究課題の期間においては，上記の通り量子 Grothendieck 環の純代数的な手法による研究に進展が大きく見られたため，こちらを中心に進めることとなった．一方で，最終的には C_X と C_Y の圏論的な関係を明快に理解することが重要であると思われるため，これらの圏を直接橋渡しする方向の研究を進めることは今後の課題である．3 に述べた通り，現在この方向は一般化量子アフィン Schur-Weyl 双対性を用いる手法が非常に強力であるが，この手法は箙 Hecke 代数の表現圏に由来する圏を間に挟むことになるため，研究代表者はより直接的に C_X と C_Y を関連付ける手法を開拓したいと考えている．これは，Hernandez-Jimbo によって導入された量子アフィン代数の Borel 部分代数の表現圏 O へ，上記の類似性の結果を一般化することを見据えたものである．しかし，この方向の研究は期間中には進めることはできなかったため，今後の課題とする．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Ryo Fujita, David Hernandez, Se-jin Oh, Hironori Oya	４．巻 2022
２．論文標題 Isomorphisms among quantum Grothendieck rings and propagation of positivity	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)	６．最初と最後の頁 117～185
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/crelle-2021-0088	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計14件（うち招待講演　12件／うち国際学会　6件）

１．発表者名 大矢　浩徳
２．発表標題 Relations among the q-characters of simple modules over quantum loop algebras of several Dynkin types
３．学会等名 Integrable Systems and Quantum Groups -In Honor of Masato Okado's 60th Birthday-（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 大矢　浩徳
２．発表標題 量子ループ代数の表現論におけるクラスター代数構造の応用について
３．学会等名 第18回代数・解析・幾何学セミナー（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 大矢　浩徳
２．発表標題 Isomorphisms among quantum Grothendieck rings and their applications
３．学会等名 Representation theory and geometry of loop spaces（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

1．発表者名 大矢　浩徳
2．発表標題 捻り写像とその応用について
3．学会等名 日本数学会2021年度秋季総合分科会・無限可積分系セッション特別講演（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 大矢　浩徳
2．発表標題 Isomorphisms among quantum Grothendieck rings and their applications
3．学会等名 Infinite Analysis 21 Workshop Around Cluster Algebras（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 大矢　浩徳
2．発表標題 Isomorphisms among quantum Grothendieck rings and their applications
3．学会等名 Quantum Groups and Cluster Algebras（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名 大矢　浩徳
2．発表標題 Systematic construction of isomorphisms among quantum Grothendieck rings
3．学会等名 表現論セミナー（招待講演）
4．発表年 2021年

１．発表者名 大矢　浩徳
２．発表標題 非対称型量子ループ代数の既約表現のq-指標について
３．学会等名 第64回 代数学シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 大矢　浩徳
２．発表標題 Cluster algebras and calculation of q-characters of simple modules over quantum loop algebras of non-symmetric type
３．学会等名 Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups -in honor of Professor Ariki's 60th birthday-（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

N.Fujita and H.Oya, Newton-Okounkov polytopes of Schubert varieties arising from cluster structures, arXiv:2002.09912
https://arxiv.org/abs/2002.09912

T.Ishibashi and H.Oya, Wilson lines and their Laurent positivity, arXiv:2011.14260
https://arxiv.org/abs/2011.14260

T.Ishibashi, H.Oya, and L.Shen, A=U for cluster algebras from moduli spaces of G-local systems, arXiv:2202.03168
https://arxiv.org/abs/2202.03168

R.Fujita, D.Hernandez, S.-j.Oh, H.Oya, Isomorphisms among quantum Grothendieck rings and cluster algebras, arXiv:2304.02562
https://arxiv.org/abs/2304.02562

個人Webページ
https://www.math.titech.ac.jp/~hoya/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	Universite de Paris			
韓国	Ewha Womans University			
米国	Michigan State University			