

様 式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19（共通）

科学研究費助成事業 研究成果報告書



令和 4 年 5 月 19 日現在

機関番号：32690

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2021

課題番号：19K14516

研究課題名（和文）Complete reducibility, geometric invariant theory, spherical buildings: a new approach to representations of algebraic groups

研究課題名（英文）Complete reducibility, geometric invariant theory, spherical buildings: a new approach to representations of algebraic groups

研究代表者

内山 智博（Uchiyama, Tomohiro）

創価大学・国際教養学部・講師

研究者番号：60822088

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000 円

研究成果の概要（和文）：本研究では代数群（行列群）の完全既約性（分解できるか否か）について3つの異なる数学の分野（1：群論、2：幾何学的不変式論（代数幾何の一分野）、3：ビルディングの理論（組み合わせ幾何学））からの手法を用いて考察した。これまで完全既約性は主に群論の表現論を用いてのみ分析され、それは代数群の「タイプ」別に行われ、非統一的で理解しにくいものであった。本研究では幾何学的不変式論を使ってそれらの分析を統一的なものに置き換え、ビルディングの理論を使ってトポロジ的、組み合わせ論的解釈を加えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまでタイプ別に分析されていた代数群の構造に幾何学的不変式論を用いた統一的理解とビルディングの理論を用いたトポロジ的解釈を与え、より構造を理解しやすくした。またこれまでほとんど分析されてこなかったより複雑な代数群のケース（体がperfectでないケース）に幾何学的不変式論を適用するとこれまで通りの結果が成り立つ場合と成り立たない場合がある事を具体例を使ってその原因とともに示した。この結果は特に数論への応用に対して重要であると考えられ、今後の発展がより期待される。

研究成果の概要（英文）：In this project, we studied Serre's notion of complete reducibility of subgroups of reductive algebraic groups using "geometric invariant theory" (a part of algebraic geometry) and "the theory of spherical buildings (highly symmetrical combinatorial objects)". So far, the study of complete reducibility had been done by representation theoretic methods that were ad hoc, using different arguments depending on the "types" of reductive algebraic groups. In this research, I invented a unified method via geometric invariant theory and the theory of spherical buildings proving various results concerning complete reducibility in very short arguments.

研究分野：代数学

キーワード：代数群

1. 研究開始当初の背景

(1) 本研究は代数群（行列群）の部分群の完全既約性（部分群を完全に綺麗に分解できるか）に関する研究であり、2000 年ごろに J.P.Serre によって始まった研究をさらに進展させるものである。本研究開始当初（2019 年）は研究対象が一部の代数群だけに限定されており（具体的には「標数」がゼロのケース）数論や代数幾何学などで使われる標数が正のケース（例えば $1 + 1 = 0$ になる世界）はその分析が複雑すぎるため研究対象ではなかった。

(2) 完全既約性の分析は代数群の「タイプ」別に表現論の複雑な議論によってなされており、全てのタイプの代数群に統一的に使えるツールは存在していなかった。その結果、完全既約性の統一的理解は非常に不十分なものであった。

2. 研究の目的

(1) 本研究の第一の目的は完全既約性の分析対象をより広い種類の代数群に拡張することであり、特に標数が正のケースで標数がゼロのケースに成り立つさまざまな結果が同じように成り立つか、また成り立たないならばその原因は何かを追求することである。

(2) 本研究の第二の目的は完全既約性の分析に従来の表現論による分析だけではなく、D.Mumford によって開発された幾何学的不変式論（代数幾何の一分野）と J.Tits によるビルディングの理論（組み合わせ幾何学の一分野）を組み合わせることによって全てのタイプの代数群の完全既約性を統一的に理解できるためのツールを開発することである。

(3) 本研究の第三の目的は代数群の完全既約性に関する統一的理解を用いてさまざまな関連した問題を解くこと、特に有限群の表現論に関する問題（Kulshammer's question）と Conjugacy class の数の有限性に関する問題を解くことである。

3. 研究の方法

(1) 本研究ではこれまで分析されてこなかったタイプの代数群を研究対象としているためその理論がまだ確立されていなかった。したがって新しい理論を作るために数多くの計算を行なってまず仮説を立てることが必要となった。その際に多くの計算を手で行うことは煩雑であるため、数学用コンピュータソフトウェア（Magma）を購入しその計算の多くをコンピュータを使って行なった。

(2) 仮説を立てたのちに現在確立している代数群、表現論、幾何学的不変式論、ビルディングの理論を修正、拡張させることによって数多くの新しい理論的結果を得た。本研究は数学の多くの分野の研究をつなげる研究のため研究中は数多くの国内、海外の研究者とのディスカッションを Zoom にて行いながら研究を進めた。

4. 研究成果

(1) 以下の引用文献中の論文 で代数群の標数が正でかつ体が「nonperfect」であるならば従来の幾何学的不変式論の結果のいくつか成り立たないことをその原因とともに代数幾何学的に示した。さらにこの結果に対応する代数群の理論を分析することにより、代数群の標数が正でかつ「nonperfect」であるならば従来の（標数がゼロの）代数群の完全既約性に関する結果もこのより一般的なケースには拡張できないことをその原因とともに示した。またこの結果をビルディングの理論に翻訳することによって、標数がゼロでない場合のビルディングの構造と標数がゼロである場合のビルディングの構造の関係をトポロジーの議論を使って示した。論文では完全既約性、幾何学的不変式論、ビルディングの理論に関する理論的結果だけでなく、その結果を例示するために、「タイプ D4」の代数群とそこで私がコンピュータを使って発見した特異な部分群を使った。この「タイプ D4」の例はこのような特異な現象を示す初めての例であった。

(2) さらに論文 では 1990 年代に Kulshammer によって提示された有限群の表現論に関する問題の完全な解答を幾何学的不変式論とコンピュータによる計算を使って与えた。また Conjugacy class が無限になる時のその原因を(1)の[タイプ D4]の例を用いながら説明した。これは 1970 年代から続く Conjugacy class の有限性の問題に最終解答を与えるきっかけになる

と考えられる。

(3) 引用文献中の論文 では代数群の標数が正でさらに体が「nonperfect」であるときと「perfect」でないときの完全既約性に違いがあるかを考察した。その結果、違いが見られる例を「タイプ F4」の代数群の部分群の中に初めて発見した。この例は私が 2019 年にドイツに研究滞在中に、ドイツ人研究者とイギリス人研究者と共同でコンピュータを用いて発見したものである。この例の発見後、さらにその理論的背景を考察し、この現象を全てのタイプの代数群において統一的に説明するたのに対応する幾何学的不変式論の理論を修正、拡張した。同時に対応するビルディングの理論も拡張させた。その結果、1950 年ごろにビルディングの理論の創始者である J.Tits による「Tits center conjecture」(ビルディングの理論における「不動点定理」、つまり、ビルディングに代数群が自然な形で作用する際にビルディングの中の三角形が移動するが、ある条件のもとで移動しない三角形があるという予想。) に対する部分解答を与えることができた。この「不動点定理」はビルディングの理論だけでなく、代数群、幾何学的不変式論、さらには数論において多様な応用が考えられ、本論文で得られた結果の影響を今後分析していくことになる。

(4) 論文 では近年数論への応用で注目されている「Pseudo-reductive groups」の理論(体が「perfect」でない場合の代数群の一般理論)と代数群の完全既約性の関係も考察した。その結果は多くの場合では「Pseudo-reductive groups」の理論と完全既約性の理論は同値であるが、いくつかの特殊なケースにおいては関係は非常に複雑であることを上述の「タイプ F4」の例を使って示した。この結果は「Pseudo-reductive groups」の理論をさらに精緻にする方向性を示すものであり、今後この研究をさらに発展させていきたいと考えている。論文 の共同執筆者の F.Bannuscher は「Pseudo-reductive groups」の専門家、A.Litterick は代数群の表現論とコンピュータを使った代数群の計算の専門家、私は幾何学的不変式論の専門家であり、それぞれ違った専門を持つ数学が協力することにより、本研究では従来の研究をさまざまな方向に拡張することができた。

<引用文献>

Tomohiro Uchiyama, Complete reducibility of subgroups of reductive algebraic groups over nonperfect fields III, Communications in Algebra, vol.47, (2019), pp.4928-4944

T.Uchiyama, F.Bannuscher, A.Litterick, Complete reducibility of subgroups of reductive algebraic groups over nonperfect fields IV: An F₄ example, Journal of Group theory, (2021), published online, <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/jgth-2020-0191/html>

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件／うち国際共著 2件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Tomohiro Uchiyama	4. 巻 47
2. 論文標題 Complete reducibility of subgroups of reductive algebraic groups over non perfect fields III	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 4928 4944
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/00927872.2019.1602873	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Bannuscher Falk, Litterick Alastair, Uchiyama Tomohiro	4. 巻 25
2. 論文標題 Complete reducibility of subgroups of reductive algebraic groups over non-perfect fields IV: An example	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Group Theory	6. 最初と最後の頁 527 ~ 541
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/jgth-2020-0191	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 1件／うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Tomohiro Uchiyama
2. 発表標題 Rationality problems for complete reducibility
3. 学会等名 Summer School: Perspectives in Linear Algebraic Groups（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	University of Essex			
ドイツ	Ruhr university of Bochum			