

令和 5 年 6 月 22 日現在

機関番号：35302

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14517

研究課題名（和文）無限次元スーパー代数群の構造論および表現論の研究

研究課題名（英文）Structure and Representations of Infinite-dimensional Algebraic Supergroups

研究代表者

柴田 大樹 (Shibata, Taiki)

岡山理科大学・理学部・講師

研究者番号：90804055

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：A. Pianzola氏（University of Alberta）と、森田純氏（筑波大学）との共同研究により、研究対象としていた affine Kac-Moody 群は、より分かりやすい（捻れ）ループ群の中心拡大として得られ、同時にリー代数レベルにおいて起きていたガロア・デサントの類似が群レベルでも然るべく起こっていることを明らかにした。また同氏らと、この研究結果を用いることで、対応するリー代数（関手）の性質を研究し、さらにその特徴づけを行った。これらの得られた結果をいずれも論文に纏めた。いずれもすでに雑誌社に投稿し、受理され掲載されている。

研究成果の学術的意義や社会的意義
リー代数の場合の類似から、当初は affine Kac-Moody 群が（捻れ）ループ群の中心拡大によって、実現されるであろうという予想がされていたが、主に捻れがある場合にそれを実際に確かめるような研究はあまり積極的になされてこなかった。本研究では、捻れがある場合に実際に上手く記述する手法を確立することにより、この予想を肯定的に解決することができ意義深い。また、得られた結果を精査することにより、ガロア・デサントというよく知られている手法で、この中心拡大の現象をとらえることができたことも意義深い。

研究成果の概要（英文）：In a joint work with Prof. A. Pianzola (University of Alberta) and Prof. Jun Morita (University of Tsukuba), we clarified the relation between affine Kac-Moody groups and twisted loop groups via Galois descent consideration. Furthermore, using the result, we also studied properties of the corresponding Lie algebras (as functors). Each of these obtained results has been compiled into papers. These papers have already been submitted to and accepted by journal publishers and have been published.

研究分野：代数学

キーワード：Kac-Moody 群 ループ群 捻れループ群 中心拡大 無限次元代数群

1. 研究開始当初の背景

リー代数と代数群とは深く関連しており、古くから良く研究されてきている。C. Chevalley (1955) は有限次元単純リー代数から今日シュヴァレー群と呼ばれる半単純代数群を構成し、有限群の分類問題に大いに貢献した。一方で有限次元単純リー代数の一般化として、カツ・ムーディ代数と呼ばれる無限次元リー代数が1960年代半ばにV. KacとR. Moodyによって独立に定義された。その中でもアフィン型のものに関しては、その指標公式が種々の組み合わせ論的な恒等式を導くなど、単なる一般化にとどまらず応用面においても非常に興味深い対象である。

カツ・ムーディ代数の理論において最も基本的な結果であるカルタン共役性定理はD. PetersonとKac (1983) によって証明された。その証明ではカツ・ムーディ代数から構成されるカツ・ムーディ群と呼ばれる、ある種の無限次元の代数群の観察をすることが重要なのであった。本質的にカツ・ムーディ代数が無限次元であることに呼応して、Peterson-Kacが考察したもの以外にもカツ・ムーディ群の定義は幾通りかあり(ある種の完備化の方法)、研究の目的に応じて研究者がそれぞれ使い分けているという背景があった。

2. 研究の目的

アフィン型のカツ・ムーディ代数 g は、その内部に有限リー代数 f を含み、 f をローラン多項式環に係数拡大を行ったものの一次元中心拡大で記述できることがよく知られている。

群のレベルにおいても「捻れのない」アフィン型のカツ・ムーディ代数 g に対しては、一次元中心拡大で記述することができることが知られていた。より具体的に述べると、下記の二つの無限次元代数群が同型になる。

- (1) シュヴァレー群のように、 g の生成元と関係式を翻訳して抽象群として定義されたもの。
- (2) g の有限部分 f から作られるシュヴァレー群の、ローラン多項式環に値をとるループ群と呼ばれる群。

この意味で、 g に付随するカツ・ムーディ群の概念はただ一つに定まる。

一方で、「捻れのある」アフィン型カツ・ムーディ代数に関しては、上記(1)のようにして無限次元代数群を構成することは容易であるが、すぐ分かるようにそれが(2)のような構成物、すなわち有限次元代数群からの構成物と一致するか否かという問題に関しては未解決であった。

そこで本研究は、問いとして「捻れのある場合を含め、アフィン型のカツ・ムーディ代数に付随する無限次元代数群を、一次元中心拡大によって有限次元代数群を用いて統一的に記述できるか」を解決することを目的とする。もし記述できる場合は、その同型射を具体的に書き下すことも目的とする。

3. 研究の方法

捻れのあるアフィン型カツ・ムーディ代数 g の場合、中心拡大の記述においては、 g の有限部分 f のローラン多項式への係数拡大を、捻れから得られる自己同型により固定点を取ったものが用いられる。これはいわゆるガロア・デサントの手法である。従って、群のレベルにおいても、 f から構成されるシュヴァレー群 F のある種の固定点を取ったものを考察する必要がある。

シュヴァレー群はその座標環であるホップ代数により完全にコントロールされているので、ホップ代数的な手法を用いることができる。この立場から1977年にE. Abeは、シュヴァレー群 F を付随するルート系の自己同型 t により固定点を取ったもの $F^{\wedge t}$ に関して、 $F^{\wedge t}$ を生成元と関係式での表示を与えていた。この $F^{\wedge t}$ は捻れシュヴァレー群と呼ばれる。

そこで本研究では、このAbeの捻れシュヴァレー群の表示を用いることで、捻れのあるアフィン型カツ・ムーディ代数から(1)のようにして構成されるカツ・ムーディ群を研究するという手法を用いる。

4. 研究成果

本研究では、上記「2. 研究の目的」で述べた問いを肯定的に解決することができた。以下でより具体的に述べる。アフィン型カツ・ムーディ代数 g に対して、その有限部分 f からシュヴァレー群 F が構成される。もし g が捻れを持つならば、捻れを与える自己同型によって、ルート系上にも自己同型 t が誘導されるので、Abeのホップ代数的な手法を用いて捻れシュヴァレー群 $F^{\wedge t}$ が構成される。定義から t が自明な場合は $F^{\wedge t}$ は F と一致していることに注意する。このとき、 g から(1)のようにして構成されたカツ・ムーディ群は、 $F^{\wedge t}$ の適当なローラン多項式環に値をとる群、捻れループ群と呼ぶ、の一次元中心拡大となっている。さらに、この中心拡大を与える具体的な射も記述することができており、結果として、抽象群として定義されたカツ・ムーディ群をより具体的な対象であるループ群のある種の固定点として実現することがで

きた。

またこの結果によって、カツ・ムーディ群を適当な群スキームとしてとらえることが可能になったので、そのリー代数を考えることができるが、適切な条件下でそれがもとのカツ・ムーディ代数 \mathfrak{g} と一致することを示した。このことにより、アフィン型のカツ・ムーディ群に対しては、内部から (1) のような生成元と関係式で与えられた抽象群として定義することなく、公理的な特徴付けにより外部から定義することが可能になった。

これらの得られた結果は「5. 主な発表論文等」の項目に記載してある通り、J. Morita 氏 (筑波大学) と A. Pianzola 氏 (University of Alberta) との共著論文として発表をしており、すでに国内外の雑誌にて受理および掲載されている。

また、当初はカツ・ムーディ群を超対称性が考慮されたスーパー・コンテクストで考察し、非スーパーのときと同様の枠組みで適当なループ・スーパー群による中心拡大として記述することも目的としていたが、下記の二点の理由によりこの目標を達成することができなかった。

一つ目の理由は、世界的な COVID-19 の影響により計画していた出張などが中止または制限されたことによって、当初計画していた Morita 氏や Pianzola 氏との共同研究に遅れが生じてしまったということである。

二つ目の理由は、非スーパーの場合において自己同型で捻じる操作が当初予期していないほどに複雑であり、結局はケース・バイ・ケースで群の中心拡大を示す必要があることに気付いたことである。これはリー代数の状況とは対照的である。このことが明確になったことにより、スーパーの場合の研究においては、自己同型の振舞いに関して、より丁寧で細やかなケース・バイ・ケースの解析が必要であるという知見を得ることができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Masuoka Akira, Shibata Taiki, Shimada Yuta	4. 巻 50
2. 論文標題 Affine algebraic super-groups with integral	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 615 ~ 634
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2021.1963758	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shibata Taiki, Shimizu Kenichi	4. 巻 -
2. 論文標題 Modified Traces and the Nakayama Functor	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Algebras and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10468-021-10102-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Morita Jun, Pianzola Arturo, Shibata Taiki	4. 巻 -
2. 論文標題 AFFINE KAC-MOODY GROUPS AS TWISTED LOOP GROUPS OBTAINED BY GALOIS DESCENT CONSIDERATIONS	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Mathematical Journal of Okayama University	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Shibata Taiki, Shimizu Kenichi	4. 巻 419
2. 論文標題 Nakayama functors for coalgebras and their applications to Frobenius tensor categories	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 108960 ~ 108960
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2023.108960	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Morita Jun、Pianzola Arturo、Shibata Taiki	4. 巻 227
2. 論文標題 Affine Kac-Moody groups and Lie algebras in the language of SGA3	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 107331 ~ 107331
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2023.107331	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計15件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Taiki Shibata
2. 発表標題 Borel-Weil theorem for algebraic supergroups
3. 学会等名 Suita Representation Theory Seminar (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Taiki Shibata
2. 発表標題 Structure and representation of algebraic supergroups: a Hopf-algebraic approach
3. 学会等名 Lie (Super)Theory, Representations and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Taiki Shibata
2. 発表標題 On Unimodularity of Frobenius Kernels of Algebraic Supergroups
3. 学会等名 36th Summer Seminar on Lie Algebras
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Taiki Shibata
2. 発表標題 A Hopf algebraic approach to algebraic supergroups
3. 学会等名 OCAMI Algebra Seminar (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Taiki Shibata
2. 発表標題 On integrals of algebraic supergroups
3. 学会等名 Mini workshop on "Lie algebras, Hopf algebras and related topics"
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 柴田大樹
2. 発表標題 スーパー Hopf 代数の積分とスーパー商への応用について
3. 学会等名 Hopf Seminar Online
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Taiki Shibata
2. 発表標題 Algebraic Supergroups from a Hopf algebraic point of view (temp)
3. 学会等名 Lie (super)theory with focus on representations and applications (IPM) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Taiki Shibata
2. 発表標題 Typical Irreducible Representations for $GL(m n)$ and Chevalley Supergroups of type I
3. 学会等名 Algebraic Lie Theory and Representations Theory (ALReT) 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Taiki Shibata
2. 発表標題 On odd reflections and algebraic supergroups
3. 学会等名 Tsukuba Workshop on Pure and Applied Mathematics 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Taiki Shibata
2. 発表標題 On irreducibility of induced modules and typical weights for algebraic supergroups
3. 学会等名 35th Summer Seminar on Lie Algebras (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Taiki Shibata
2. 発表標題 Algebraic supergroups and their representations over a field
3. 学会等名 International Workshop on Hopf Algebras and Tensor Categories (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Taiki Shibata
2. 発表標題 Typical representations for Chevalley supergroups of type I
3. 学会等名 MSJ Autumn Meeting 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Taiki Shibata
2. 発表標題 On algebraic supergroups and their representations
3. 学会等名 "Algebra Seminar", University of Southern California (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Taiki Shibata
2. 発表標題 A Hopf-algebraic study of Quasireductive supergroups
3. 学会等名 The 2nd Meeting for Study of Number Theory, Hopf Algebras and Related Topics (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Taiki Shibata
2. 発表標題 Affine Kac-Moody Groups as Twisted Loop Groups
3. 学会等名 The pursuit of symmetry: A conference in honour of the 80th birthday of Robert V. Moody (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

個人ホームページ(発表論文のリストあり)
<https://sites.google.com/site/mathshibata>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------