

令和 5 年 6 月 6 日現在

機関番号：12201

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14521

研究課題名（和文）平均曲率流のII型特異性に関する研究

研究課題名（英文）Research on type II singularities of the mean curvature flow

研究代表者

國川 慶太（KUNIKAWA, Keita）

宇都宮大学・共同教育学部・助教

研究者番号：10813165

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、平均曲率流のII型特異性を、Colding-Minicozziらにより導入されたエントロピーを用いて調べるということに取り組んだ。当初の計画では、個々の対象に対してエントロピーを具体的に計算し、その傾向を把握する予定であったが、それは技術的に困難であると判明した。そこで、代替案として、エントロピーを別の量と結びつけて考察することにした。その結果、平均曲率流の古代解上では、大域的な量であるエントロピーがEckerの単調量によって局所化できるということを発見した。この成果は、複雑なエントロピーの計算において別手法を提案するものとなっており、今後の応用が期待される。

研究成果の学術的意義や社会的意義

平均曲率流の研究では、特異点を理解することが重要である。Colding-Minicozziらによって導入されたエントロピーは特異点の複雑さを測るものとして有用であり、すでに多くの一般的な結果が知られている。一方、これまで、個々の対象に関する具体的なエントロピー計算は困難であった。本研究では、エントロピーを別のよく知られた量と結びつけることに成功したが、この成果は、複雑なエントロピーの計算に別視点を与えるものとなっており、今後の特異点研究への応用が期待される。

研究成果の概要（英文）：In this research, I tried to understand type II singularities of the mean curvature using the entropy introduced by Colding-Minicozzi. The original plan was to specifically calculate the entropy for each translating solitons (ancient solutions) to identify trends, but this proved to be technically difficult. Instead, I characterized the entropy by another quantity. Precisely, I found that on ancient solutions, the entropy coincides with Ecker's local monotone quantity at infinity. This result gives us a new method and perspective for computations of the entropy.

研究分野：幾何解析

キーワード：平均曲率流 優リッチフロー 熱方程式 エントロピー Liouville型定理 古代解

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

与えられた空間内で「体積最小な部分多様体を見つけよ」という問題は、一つの古典的な問題である。極小部分多様体は体積汎関数の臨界点であり、この問題の解の候補となるが、直接的に体積最小性を持つ極小部分多様体を見つけることはとても難しい。そこで有用なのが、平均曲率流によるアプローチである。これはまず適当な部分多様体を与えておき、それを平均曲率流に沿って変形していくことで、変形の結果として体積最小な極小部分多様体を見つけるという方法である。つまり平均曲率流の時間大域解の存在と、極小部分多様体への収束を示すことになる。このアプローチが可能なのは平均曲率流が部分多様体の体積汎関数に関する負の勾配流であり、極小部分多様体はその停留点となっているからである。

しかし、実は平均曲率流によるこのようなアプローチには避けては通れない問題点がある。それが「特異点の発生」である。特異点とは平均曲率流に沿って部分多様体の第2基本形式が無限大に発散してしまう点のことである。特異点が発生すると、そこでは第2基本形式が無限大なので幾何的にも解析的にもそれ以上の扱いが困難になってしまう。また、そもそも特異点がいつ発生するかに関しても、明確な判断基準があるわけではないので、問題はより複雑になる。特異性が生じるか否かは、平均曲率流の初期値の幾何学的性質に強く依存することは確かだが、一般にはどのような状況下で特異点が生じるのかは全く明らかにはなっていない。そこで次の問いが生じる：

(1) 平均曲率流の特異性はいつ発生するのか。

(2) 特異点付近の解の漸近挙動や特異点の性質を調べ、その分類をすることは可能か。

これらの問いは最近のものではなく、平均曲率流の歴史の始まりとともに生じたものとも言えるが、現在でも超曲面のような限定的状況でしか理解は進んでいない。余次元が高くなると、第2基本形式の振る舞いが複雑になるため、その扱いは困難になる。

また特異点に“よい条件”を課した状況もよく調べられている。よい条件を満たす特異点をI型、そうでないものをII型特異点と呼ぶが、II型特異点の先行研究は格段に少ない。以上の話をまとめると、超曲面のI型特異性はよく調べられている一方で、余次元が高い部分多様体のII型特異性はほとんど調べられていない、ということになる。このような背景から、研究代表者は「平均曲率流のII型特異性」を本研究課題として設定した。

### 2. 研究の目的

平均曲率流を考える上で重要な部分多様体のクラスはラグランジュ部分多様体である。外側の空間がケーラー・アインシュタイン多様体であると、Smoczykは「ラグランジュ部分多様体という性質は平均曲率流で保たれる」ことを示した。これにより、初期値をラグランジュ部分多様体とする平均曲率流は、特にラグランジュ平均曲率流と呼ばれる。カラビ・ヤウ多様体の中のラグランジュ部分多様体上では、ラグランジュ角という量(多価関数)が定まる。これが特に一価関数であるとき、ラグランジュ部分多様体はzero-Maslov類に属するという。実は、ラグランジュ部分多様体がzero-Maslov類に属するという性質も平均曲率流に沿って保たれるので、この場合をzero-Maslov平均曲率流と呼ぶ。極小ラグランジュ部分多様体はzero-Maslov類に属するので、ラグランジュ平均曲率流において極小ラグランジュ部分多様体への収束問題を考える際には、zero-Maslov平均曲率流を考えるのが自然である。ところが、実は、SmoczykやNevesにより、zero-Maslov平均曲率流ではI型特異点が生じないことが示されている。つまり、この場合にはII型特異点を調べるのが本質的に重要な課題となっている。それにも関わらず、zero-Maslov平均曲率流のII型特異点の研究はあまり進展していない。そこで研究代表者は、特に次の2つに焦点を絞り研究を行う計画を立てた：

(ア) Zero-Maslov平均曲率流において、どのような状況でII型特異点が発生するか。また特異点の様子を詳細に調べられるか。

(イ) Zero-Maslov平均曲率流のII型特異点モデルとしてのラグランジュ・トランスレーティングソリトンの性質を調べ、それを分類することは可能か。

(ア)については、II型特異点を持つような平均曲率流の具体例を構成することや、II型特異点を生じるような初期値に関する幾何学的条件の発見、及び適切な幾何学的量を用いたII型特異点の特徴づけなどを目標とした。また(イ)については、完全な分類は現実的に不可能であると考えられるので、ある種の安定性のような条件を課した上での分類を目指した。これらの研究を通してII型特異点の解明に貢献することを本研究の目的とした。

### 3. 研究の方法

新しい対象を調べるには具体例を調べるのがよい。しかし、実際にII型特異点を持つzero-Maslov平均曲率流の具体例を見つけることは容易ではないし、仮にそのような例があったとしても特異点の様子を詳細に調べることは難しい。曲線の場合を除き、現在までに唯一知られている平均曲率流の具体例はSavas-Halilaj-Smoczykらにより構成されたものである。彼らはホイットニー球面を初期値とするzero-Maslov平均曲率流がII型特異点を持つことを示し、さらにその特異点モデルを分類している。彼らの先行研究に基づき、研究代表者は次のような研究計画

を立てた。

【研究 A】: Savas-Halilaj-Smoczyk の具体例において平均曲率流に沿った「エントロピー」の計算を行い、II 型特異点発生時におけるその振る舞いを観察する。エントロピーは Colding-Minicozzi らが特異点モデル、特に自己縮小解の分類を行うために導入した概念で、ユークリッド空間内の拡大・縮小や合同変換で不変な量である。さらに、エントロピーは平均曲率流に沿って単調減少であるという顕著な性質も持つ。このような性質から、研究代表者はエントロピーが II 型特異点の性質を調べる際に有効な道具となるのではないかと推測し、研究に取り組むことにした。これまでにラグランジュ平均曲率流の II 型特異点の発生状況をエントロピーにより記述するという研究はないが、重要な手がかりとして Guang の結果がある。彼は 1 次元の II 型特異点モデルであるグリムリーパーについてエントロピーの値を具体的に求めている。一方、Savas-Halilaj-Smoczyk の具体例から現れる II 型特異点モデルは本質的にこのグリムリーパーであることがわかっているため、Guang によるエントロピーの計算方法が参考になるはずだと考えた。Savas-Halilaj-Smoczyk の具体例についてエントロピーを用いた II 型特異性の記述を目指し研究を進めた。

【研究 B】平均曲率流の II 型特異点モデルとしてはトランスレーティングソリトンが重要である。Joyce-Lee-Tsui らはラグランジュ・トランスレーティングソリトン (これは自動的に zero-Maslov) で、ラグランジュ角の振幅がいくらでも小さくできるような具体例を構成していた。研究代表者の疑問は、彼らの具体例が zero-Maslov 平均曲率流の II 型特異点モデルになり得るのかどうかということであった。そこでこの具体例について、エントロピーの計算を行い、それをグリムリーパーと比較するという計画を立てた。エントロピーは特異点の複雑さを測るものであり、基本的に、エントロピーの大きなものは実際の特異点としては現れにくいという経験的知見がある。Joyce-Lee-Tsui によるトランスレーティングソリトンのエントロピーがグリムリーパーのものよりも大きければ、それは II 型特異点としては現れないことが主張できると期待し、具体例の計算に取り組んだ。

#### 4. 研究成果

実際に、Joyce-Lee-Tsui らのトランスレーティングソリトンについてエントロピーの具体的な計算を実行しようとしたところ、それが当初想定していたよりも遥かに困難であることが判明した。Guang が 1 次元の場合に行った計算を参考にはしたが、Joyce-Lee-Tsui らのトランスレーティングソリトンは高次元であり、計算が技術的に難しくなる。そこで、研究代表者は方針を切り替え、まずはエントロピーの性質を詳しく調べてみることにした。その結果、トランスレーティングソリトン等の古代解上では、エントロピーが Ecker の単調量と無限遠で漸近的に一致するという新たな発見をすることができた。Ecker は熱方程式でよく知られている平均値定理を平均曲率流バージョンに拡張することで、この単調量を得ている。エントロピーが大域的な量である一方、Ecker の単調量は、時空のボール上で平均を取るという意味で局所的な量である。2 つの量が漸近的に一致するという研究代表者の結果は、エントロピーが Ecker の単調量により局所化できるということの意味している。一般には計算困難なエントロピーについて、別視点からの新たな解釈および計算手法を提案することができたのは、この研究の成果の一つであり、今後の特異点研究への応用が期待される。

また、この研究をきっかけとして、研究代表者は優リッチフローに沿った熱方程式の古代解に興味を持った。当初の研究計画とは異なるが、櫻井陽平氏と共同で、時間発展するリーマン多様体上の熱方程式を詳しく調べ、Perelman による簡約幾何を用いた新たな勾配評価の方法を発見し、その結果として古代解に関する Liouville 型定理を導いた。これを皮切りに、時間発展するリーマン多様体上の熱方程式に関する研究を推し進め、例えば熱核評価などの結果も得ている。

研究期間全体を通して、当初予定していた平均曲率流の II 型特異点を調べることに限っては、全く計画通りに進めることができなかった。一方、その過程でエントロピーや古代解に関する新たな知見を得るとともに、今後の課題を多数見つけることができた。優リッチフローやそれに沿った熱方程式に関しては、今後も継続して研究していきたい。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

|   |                             |
|---|-----------------------------|
| 1. 著者名<br>Kunikawa Keita, Sakurai Yohei   | 4. 巻<br>31                  |
| 2. 論文標題<br>Liouville Theorem for Heat Equation Along Ancient Super Ricci Flow Via Reduced Geometry                                | 5. 発行年<br>2021年             |
| 3. 雑誌名<br>The Journal of Geometric Analysis   | 6. 最初と最後の頁<br>11899 ~ 11930 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s12220-021-00705-1  | 査読の有無<br>有                  |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-                   |
| 1. 著者名<br>Kunikawa Keita, Sakurai Yohei   | 4. 巻<br>150                 |
| 2. 論文標題<br>Yau and Souplet-Zhang type gradient estimates on Riemannian manifolds with boundary under Dirichlet boundary condition | 5. 発行年<br>2021年             |
| 3. 雑誌名<br>Proceedings of the American Mathematical Society  | 6. 最初と最後の頁<br>1767 ~ 1777   |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1090/proc/15768  | 査読の有無<br>有                  |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-                   |
| 1. 著者名<br>Kunikawa Keita, Sakurai Yohei   | 4. 巻<br>60                  |
| 2. 論文標題<br>Liouville theorems for harmonic map heat flow along ancient super Ricci flow via reduced geometry                      | 5. 発行年<br>2021年             |
| 3. 雑誌名<br>Calculus of Variations and Partial Differential Equations   | 6. 最初と最後の頁<br>-             |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s00526-021-02079-2  | 査読の有無<br>有                  |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-                   |
| 1. 著者名<br>Kunikawa Keita  | 4. 巻<br>58                  |
| 2. 論文標題<br>On Ecker's local integral quantity at infinity for ancient mean curvature flows  | 5. 発行年<br>2020年             |
| 3. 雑誌名<br>Annals of Global Analysis and Geometry  | 6. 最初と最後の頁<br>253 ~ 266     |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s10455-020-09724-7  | 査読の有無<br>有                  |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-                   |

〔学会発表〕 計17件（うち招待講演 15件 / うち国際学会 4件）

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>國川慶太                                  |
| 2. 発表標題<br>Super Ricci flowに沿ったBamler-Zhang型熱核評価 |
| 3. 学会等名<br>金沢大学数理談話会（招待講演）                       |
| 4. 発表年<br>2022年                                  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>國川慶太                          |
| 2. 発表標題<br>Super Ricci flowに沿った熱方程式の幾何解析 |
| 3. 学会等名<br>2022年度福岡大学微分幾何学研究集会（招待講演）     |
| 4. 発表年<br>2022年                          |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>國川慶太                                  |
| 2. 発表標題<br>Super Ricci flowに沿ったBamler-Zhang型熱核評価 |
| 3. 学会等名<br>日本数学会2022年度秋季総合分科会                    |
| 4. 発表年<br>2022年                                  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>國川慶太                              |
| 2. 発表標題<br>調和写像に関する増大度条件付きLiouville型定理       |
| 3. 学会等名<br>日本数学会2022年度年会（対面開催中止、アブストラクト提出のみ） |
| 4. 発表年<br>2022年                              |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>國川慶太                                  |
| 2. 発表標題<br>Super Ricci flowに沿ったBamler-Zhang型熱核評価 |
| 3. 学会等名<br>若手による幾何学研究報告会（招待講演）                   |
| 4. 発表年<br>2022年                                  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>國川慶太                                  |
| 2. 発表標題<br>Super Ricci flowに沿ったBamler-Zhang型熱核評価 |
| 3. 学会等名<br>部分多様体幾何とリー群作用2021（招待講演）               |
| 4. 発表年<br>2022年                                  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>國川慶太                                |
| 2. 発表標題<br>調和写像およびそのフローに関する増大度条件付きLiouville型定理 |
| 3. 学会等名<br>確率論と幾何学2021（招待講演）                   |
| 4. 発表年<br>2022年                                |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>國川慶太                        |
| 2. 発表標題<br>調和写像に関する増大度条件付きLiouville型定理 |
| 3. 学会等名<br>九州大学幾何セミナー（招待講演）            |
| 4. 発表年<br>2021年                        |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>國川慶太                            |
| 2. 発表標題<br>Ricci flowに沿った熱方程式のLiouville型定理 |
| 3. 学会等名<br>リーマン幾何と幾何解析 (招待講演)              |
| 4. 発表年<br>2021年                            |

|                                    |
|------------------------------------|
| 1. 発表者名<br>國川慶太                    |
| 2. 発表標題<br>リッチフローに沿った熱方程式のリウヴィル型定理 |
| 3. 学会等名<br>部分多様体とリー群作用2020 (招待講演)  |
| 4. 発表年<br>2021年                    |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>國川慶太   |
| 2. 発表標題<br>Ricci flow, heat equation, Liouville type theorem                        |
| 3. 学会等名<br>Submanifolds of symmetric spaces and their time evolutions (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2021年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>國川慶太   |
| 2. 発表標題<br>Liouville theorem for heat equation along ancient Ricci flow                             |
| 3. 学会等名<br>International Workshop on Geometric Evolution Equations and Related Fields (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2021年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>櫻井陽平  |
| 2. 発表標題<br>Liouville theorem for heat equation along ancient super Ricci flow via reduced geometry |
| 3. 学会等名<br>第67回幾何学シンポジウム (招待講演)  |
| 4. 発表年<br>2020年  |

|                                 |
|---------------------------------|
| 1. 発表者名<br>國川慶太                 |
| 2. 発表標題<br>平均曲率流の2つの単調性公式に関する考察 |
| 3. 学会等名<br>広島幾何学研究集会2019 (招待講演) |
| 4. 発表年<br>2019年                 |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>國川慶太  |
| 2. 発表標題<br>On a Relation between Two Monotonicity Formulas for Mean Curvature Flow |
| 3. 学会等名<br>第2回台湾-日本微分幾何学国際研究集会 (招待講演) (国際学会)                                       |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|                                     |
|-------------------------------------|
| 1. 発表者名<br>國川慶太                     |
| 2. 発表標題<br>平均曲率流の2つの単調性公式の関係        |
| 3. 学会等名<br>部分多様体幾何とリー群作用2019 (招待講演) |
| 4. 発表年<br>2019年                     |



|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>國川慶太  |
| 2. 発表標題<br>On Ecker's integral at infinity on ancient mean curvature flows   |
| 3. 学会等名<br>The 18th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on "Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems" (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年  |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

國川慶太のホームページ  
<https://k-kunikawa.github.io/>  
 研究期間中の成果であるが、査読中や出版準備中（採択済み）のために本報告書で記載できない論文は、個人ホームページにて公開している。

6. 研究組織

| 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|