

令和 6 年 6 月 25 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14525

研究課題名（和文）ランダム3次元多様体の統計学

研究課題名（英文）Statistics of Random 3-manifolds

研究代表者

正井 秀俊（Masai, Hidetoshi）

東京工業大学・理学院・助教

研究者番号：40735734

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,100,000円

研究成果の概要（和文）：主な成果として論文「Compactification and distance on Teichmuller space via renormalized volume」を執筆した。本研究課題において、ランダム3次元多様体の双曲体積は重要な研究課題であるが、該当論文は双曲体積について知見を深めるものである。くりこみ体積と呼ばれる3次元閉多様体の体積に密接に関係する不変量を用いてタイヒミュラー空間の上に距離を定義した。本研究課題目標である、移動距離の"ランダム版"のドリフトに対して、体積などの不変量の関係を調べることに對しての成果であり、新しく定義された距離は、本研究期間中の1番の成果と言える。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の主なテーマであるタイヒミュラー空間の研究は、幾何学と複素解析において重要な役割を果たし、特にリーマン面やモジュライ空間の理解に貢献している。この研究は、物理学やエンジニアリング、特に弦理論や情報科学の分野での応用が期待される。さまざまな数理モデルの構築やデータ解析の手法にも応用の可能性がある。さらに、タイヒミュラー空間の概念は画像認識や機械学習の分野でも活用され、データの構造化や解析の効率化に寄与するものであり、タイヒミュラー空間の研究は社会的に意義がある。

研究成果の概要（英文）：As a major achievement, I wrote the paper "Compactification and Distance on Teichmuller Space via Renormalized Volume." This paper discusses volume, the principal invariant that we aim to study for random 3-manifolds in this research project. By using an invariant closely related to the volume of 3-manifolds, called the renormalized volume, we defined a distance on Teichmuller space. This accomplishment pertains to the relationship of invariants between volume with drifts, the 'random version' of translation distance, which is the goal of this research project. The newly defined distance can be considered the most significant achievement during the research period.

研究分野：タイヒミュラー空間論

キーワード：タイヒミュラー空間 双曲多様体

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

応募者はこれまで、3次元多様体論、特に3次元双曲多様体論を研究してきた。3次元多様体論では、Thurston が提出した問題集が分野全体を牽引する目標とされてきた。その問題集の中には3次元多様体の幾何化予想、仮想 fibered 予想などが含まれていたが、Perelman, Agol などによる近年の仕事により、いくつかの整数論関連の問題を除き解決された。それにより個々の3次元多様体が持つ性質はかなり理解が進んだ。

本研究では、3次元多様体全体の理解に向けてその統計的情報を写像類群上のランダムウォークを用いて研究する。

特に応募者がこれまで研究してきた擬アノソフ写像をモノドロミーとする fibered 双曲多様体との関連を踏まえ、ランダムウォークで得られる写像類による写像トーラスを研究する。

ランダムネスは計算機実験との相性が良く、応募者がこれまでに行ってきた3次元双曲多様体に関連する計算機実験などの経験も生かすことができる。

空間上の同相写像をイソトピーで割った集合に写像の合成を積として群構造を与えたものを写像類群と呼ぶ。写像類群の元を写像類と呼ぶ。

一般に、空間の写像類群はその空間の対称性、構造の豊かさなどの情報を持っており、写像類群の理解はその空間の理解において重要である。本研究では特に曲面の写像類群に着目する。以降写像類群は曲面のものを指すものとする。

曲面の場合、写像類群は特に豊富な性質を持つ事が知られており、曲面上の複素構造、双曲構造や、曲面上の複素または双曲構造の空間として得られる Teichmüller 空間、曲面上の曲線から得られる空間である曲線グラフなど、重要な概念との深い関連が知られている。また、曲面と区間の直積をとり、区間の端点に対応する境界を写像類で貼り合わせる事により写像トーラスと呼ばれる3次元多様体を構成する事ができる。

上に挙げた仮想 fibered 予想の解決により、ほとんどの3次元多様体は有限被覆をとる事により写像トーラスとして書ける事が知られており、写像類群は3次元多様体論と双方向に関連し合う重要な研究対象である。

2. 研究の目的

3次元多様体の統計学の理解に向けて

写像類群上のランダムウォークから得られるランダム写像類に対し、様々な力学系的量の漸近挙動、特に双曲体積と伸縮因子の関係を観察するのが研究の目的である。

ランダム写像類一つ一つに対していくつかの不変量を比べる事は、各写像類における比較と大きな違いはない。本研究ではランダム写像類の不変量の漸近挙動について研究する。

すなわち n 歩のランダムウォークで得られるランダム写像類の不変量の値が C_n であるとしたとき, C_n/n の極限を調べ, 様々な不変量に対してその挙動を比較する.

比較を行う研究対象として, 様々な距離に関する移動距離や双曲体積などを考える.

3. 研究の方法

タイヒミュラー空間上の写像類群の作用を用いる. 写像類群上でランダムウォークをすることにより, ランダムに 3 次元多様体を生成すると同時に, タイヒミュラー空間の上での力学系を生成することができる. これらの性質を比べていく. 同時に, タイヒミュラー空間論, 双曲多様体論の研究も行いランダム性を介さないこれらの分野を研究していくことで, 2 次元トポロジーの研究を通した 3 次元トポロジーの理解と, その逆方向の理解について体積, ペアズ埋め込み, ファイバー多様体などに関連させながら研究していく.

4. 研究成果

主な成果として論文「Compactification and distance on Teichmuller space via renormalized volume」を執筆した. 本研究課題において, ランダム 3 次元多様体の双曲体積は重要な研究課題であるが, 論文「Compactification and distance on Teichmuller space via renormalized volume」は双曲体積について知見を深めるものである. くりこみ体積と呼ばれる 3 次元閉多様体の体積に密接に関係する不変量を用いてタイヒミュラー空間の上に距離を定義した. 本研究課題目標である, 移動距離の"ランダム版"のドリフトに対して, 体積などの不変量の間関係を調べることに對しての成果であり, 新しく定義された距離は, 本研究期間中の 1 番の成果と言える.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masai Hidetoshi、McShane Greg	4. 巻 385
2. 論文標題 On systoles and ortho spectrum rigidity	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 939 ~ 959
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-022-02365-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hidetoshi Masai	4. 巻 No. 2219
2. 論文標題 A quick tour to the distance on Teichmuller space via renormalized volume	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 RIMS 講究録	6. 最初と最後の頁 76-83
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masai Hidetoshi	4. 巻 28
2. 論文標題 On continuity of drifts of the mapping class group	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematical Research Letters	6. 最初と最後の頁 823 ~ 847
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/MRL.2021.v28.n3.a8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masai Hidetoshi、McShane Greg	4. 巻 -
2. 論文標題 On systoles and ortho spectrum rigidity	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-022-02365-0	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計22件（うち招待講演 20件 / うち国際学会 7件）

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 A distance on Teichmüller space via renormalized volume
3. 学会等名 YMSC Topology Seminar (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 Visualizing deformations of hyperbolic and complex structures on 4-punctured spheres
3. 学会等名 ウプサラ・東工大シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 4点穴あき球面のタイヒミュラー測地線に沿った複素変形
3. 学会等名 日本数学会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 線り込み体積とタイヒミュラー空間上の距離
3. 学会等名 第65回 函数論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 距離のレシビとそのタイヒミュラー理論への応用
3. 学会等名 東北大学幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 写像類群上のランダムウォークについて
3. 学会等名 Random topics on Teichmuller theory
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 A note on distances and horofunctions
3. 学会等名 Geometry in Low dimensions 2022（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 Visualizing deformations of hyperbolic and complex structures on 4-punctured spheres.
3. 学会等名 Friday Seminar on Knot Theory（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 Quotients of the curve complex
3. 学会等名 Geometry of discrete groups and hyperbolic spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 タイヒミュラー空間のホロ境界
3. 学会等名 トポロジーシンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 Continuity of the drift of mapping class group
3. 学会等名 Geometric Group Theory in East Asia(GGTEA) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 Complete exceptional surgeries on two-bridge links
3. 学会等名 The 16th East Asian Conference on Geometric Topology (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 On systoles and ortho spectrum rigidity
3. 学会等名 阪大トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 Quotients of curve complex
3. 学会等名 京都大学微分トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 曲線複体の商空間
3. 学会等名 2020年度「リーマン面・不連続群論」研究集会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 3次元多様体の（非）双曲性の計算機による判定
3. 学会等名 数学ソフトウェアとフリードキュメント 32（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 On continuity of drifts of the mapping class group
3. 学会等名 首都大学幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 On the Continuity of Drifts of Mapping Class Groups
3. 学会等名 Geometric Topology Fair 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 On systoles and ortho spectrum rigidity
3. 学会等名 Seminar on Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 On rigidity of length-related spectra
3. 学会等名 The 6th Tokyo Tech - Uppsala University Joint Symposium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 On systoles and ortho spectrum rigidity
3. 学会等名 NUS Topology and Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 正井秀俊
2. 発表標題 On systoles and ortho spectrum rigidity
3. 学会等名 2019年度「リーマン面・不連続群論」研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

https://sites.google.com/view/hidetoshimasai/home

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------