

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：32665

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14527

研究課題名（和文）平均曲率零曲面の諸理論の統合と計量の符号数に応じた幾何学的性質の探求

研究課題名（英文）Unification of various theories of zero mean curvature surfaces and exploration of geometrical properties according to signature of metrics

研究代表者

赤嶺 新太郎 (AKAMINE, Shintaro)

日本大学・生物資源科学部・講師

研究者番号：50825148

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：ミンコフスキー空間内の極大超曲面に関するCalabi-Bernsteinの定理を曲面の計量が退化する光的点を許容した形に拡張した。ナル・エネルギー条件を持つローレンツ多様体内で光的完備な光的超曲面は全測地的なものに限ることを証明し、光的超曲面の大域的な構造を明らかにした。特異点付きの光的超曲面のクラスとして光的波面というクラスを考えて、光的波面に対する構造定理を明らかにした。3次元ユークリッド空間内の極小曲面と3次元ミンコフスキー時空内の極大曲面のある境界値問題の解に双対性とと呼ばれる一対一対応があることを明らかにした。また、関連するいくつかの境界値問題に対して新たな鏡像の原理を発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ユークリッド空間内の極小曲面およびミンコフスキー空間内の光的曲面、極大曲面、時間的極小曲面という様々なクラスの曲面を平均曲率零曲面という見方から統一的に捉え、異なる空間内の曲面に対して類似した現象や原理があることを解き明かしたことが本研究成果の意義である。また、そのような幾何学的な研究を行うために調和関数論が重要な役割を果たすことが明らかになったことで、曲面の微分幾何学、関数論を始めとした他分野への影響も期待される。

研究成果の概要（英文）：The Calabi-Bernstein theorem on maximal hypersurfaces in Minkowski space is generalized to allow lightlike points where the metric of the surface is degenerate. It is proved that lightlike hypersurfaces in Lorentzian manifolds with the null energy condition that are lightlike complete are only totally geodesic, and the global structure of such hypersurfaces is clarified. As a class of lightlike hypersurfaces with singularities, we consider the class of null wavefronts and clarify a structure theorem for null wavefronts. It is shown that there is a one-to-one correspondence, called duality, between the solutions of certain boundary value problems for minimal surfaces in three-dimensional Euclidean space and maximal surfaces in three-dimensional Minkowski spacetime. New reflection principles are also discovered for several related boundary value problems.

研究分野：微分幾何学

キーワード：微分幾何学 光的超曲面 極小曲面 極大曲面 時間的極小曲面

1. 研究開始当初の背景

ユークリッド空間内の極小曲面やミンコフスキー空間内の極大曲面, 時間的極小曲面などの曲面は, それぞれの空間内で平均曲率が恒等的に零になるという性質を持つ平均曲率零曲面と呼ばれる曲面である. それらの曲面は, リーマン面上の正則 1 形式と有理型関数 (またはそのパラ複素版) を用いて記述されるワイエルシュトラス型の表現公式を持つことを始め, 様々な類似した性質を持つ. その一方で, 外空間や曲面の計量の符号数が異なることにより, 曲面上に現れ得る特異点の種類やガウス曲率の挙動など曲面毎に異なる様々な性質も有している. また, ミンコフスキー空間内の光的超曲面については, 曲面上の計量が退化していることから通常の意味での平均曲率を定義することはできないが, 極大曲面や時間的極小曲面が従っている平均曲率零曲面の偏微分方程式を満しており, 平均曲率零曲面として見なすことができる. 本研究課題を通して, 上記の曲面に共通した性質や計量の符号数により変化する性質が, どのような原理に基づいて統合あるいは分類されるのかを解明したいと考えていた.

2. 研究の目的

平均曲率零曲面に対して, 曲面の計量の符号数によらずに現れる性質を理論的に全く新しい観点から統合し, その一方で計量の符号数によって全く異なった様相を呈する曲面の幾何学的性質を探索することを目的とした. 具体的には, 正定値計量を持つ平均曲率零曲面が共通して持つ性質として, 曲面がある関数のグラフとして表される場合 (以下, グラフ型曲面と呼ぶ) に成り立つ Krust 型定理や Calabi-Bernstein 型定理に対して, 何らかの統一的な記述や原理の解明による定理の一般化を与えること, また不定値計量を持つ平均曲率零曲面に対しては, 正定値計量を持つ曲面とは顕著に異なった性質を新たに見出すこと等を目標としていた.

3. 研究の方法

ユークリッド空間内の極小曲面とミンコフスキー空間内の極大曲面については, どちらも調和関数を用いて表すことができ, さらにそれぞれの平均曲率零曲面方程式の解の間には一対一対応がある. そのことを踏まえた上で調和関数論を駆使することで, これらの正定値計量を持つ曲面を同時に取り扱って研究を行った. また, 適切な連続変形を考えることで, ユークリッド空間とミンコフスキー空間の間に isotropic 空間と呼ばれる退化計量を持つ空間が現れるので, その空間内の曲面に着目することで極小曲面や極大曲面に共通した性質が見出せないか考察した. 光的超曲面を始めとした計量が退化する正則点を持つ曲面については, 近年明らかになりつつある光的点の性質を踏まえて, 大域的な考察を行った. 計量が不定値になる時間的極小曲面については様々な状況が生じると思われるため, ガウス曲率の挙動によってそのタイプを分けて研究を行った. 研究にあたっては, 本田淳史氏 (横浜国立大学), 梅原雅顕氏 (東京工業大学), 山田光太郎氏 (東京工業大学), 藤野弘基氏 (名古屋大学) らを始めとした研究者らと密に意見交換や打ち合わせを行った.

4. 研究成果

・計量の退化点を許容した形での Calabi-Bernstein の定理の一般化について:
本田淳史氏 (横浜国立大学), 梅原雅顕氏 (東京工業大学), 山田光太郎氏 (東京工業大学) との共同研究でローレンツ・ミンコフスキー空間内の極大超曲面に関する Calabi-Bernstein の定理「空間的平面全体で定義された関数のグラフとして表される極大超曲面は平面に限る」を曲面の計量が退化する光的点を許容した形に拡張した.

・光的超曲面の大域的な構造について:

本田氏, 梅原氏, 山田氏とともにナル・エネルギー条件を持つローレンツ多様体内で光的完備な光的超曲面は全測地的なものに限ることを証明し, 光的超曲面の大域的な構造を明らかにした. また, 特異点付きの光的超曲面のクラスとして光的波面というクラスを考えて, 光的波面に対する構造定理を明らかにした.

・グラフ型曲面に対する Krust 型定理の統合と一般化について:

藤野弘基氏 (名古屋大学) との共同研究で 3 次元ユークリッド空間内の極小曲面と 3 次元ミンコフスキー空間内の極大曲面, および 3 次元 isotropic 空間内の空間的平均曲率

零曲面などの様々な平坦空間内における平均曲率零曲面を滑らかにつなぐ変形族を考案し、それらの空間内での等長変形族（同伴族）、Lopez-Ros 変形、Calabi 対応を含めた 3 径数の変形族を導入した。さらに、それらの曲面の変形族を調和関数論を用いて統一的に扱う方法を明らかにし、「曲面がある関数のグラフとして表される」というグラフ性が曲面の変形に対して保存される統一的な条件を与えた。従来の Krust 型定理「グラフ型極小曲面の定義域が凸領域になっている場合は、極小曲面の同伴族に含まれる任意の曲面がまた同じ平面上で定義された関数のグラフになる」を上述の等長とは限らない変形族に拡張したほか、変形途中で現れる異なる外空間内の平均曲率零曲面を見ることが定理の凸性条件を外すことに成功した。また、新たに構成した条件が最良であることも証明した。

・極小曲面方程式と極大曲面方程式の境界値問題の解の双対対応について：

藤野氏とともに 3 次元ユークリッド空間内の極小曲面方程式の無限境界値問題と 3 次元ミンコフスキー時空内の極大曲面に対するある光的境界値問題の解の間に双対性とと呼ばれる一対一対応があることを調和関数論の観点から明らかにした。極小曲面方程式の無限境界値問題の解の存在と一意性に関する必要十分条件が Jenkins-Serrin により与えられていることを用いることで、極大曲面の境界がいくつかの光的線分となっている場合の Plateau 問題の解の存在と一意性に関する必要十分条件を与えることができた。また、そのような境界値問題の解の Poisson 積分を用いた具体的な構成法も与えた。

・新たな鏡像の原理の発見について：

上述の極小曲面方程式と極大曲面方程式の境界値問題の解の双対対応の研究の応用として、極大曲面の光的線分および isotropic 空間内の isotropic 直線に対する、鏡像の原理 (reflection principle) を明らかにした。極大曲面の光的線分や isotropic 空間内の平均曲率零曲面の isotropic 直線は、それぞれの空間内で計量の退化点として現れる直線であるため、従来の Schwarz 型の鏡像の原理が成り立たないことが知られていた。そのため、それらの境界条件に対する鏡像の原理の成立やそれに伴う実解析的拡張の有無については、いくつかの最新の研究論文の中でも問題提起されていたが、本研究により、その中核をなす部分を解決した。

・時間的極小曲面の等長類や反等長類について：

不定値計量を持つ曲面に特有の性質を明らかにする研究の一環として、時間的極小曲面と呼ばれる不定値計量を持つ平均曲率零曲面の等長類や対称性の研究を行った。従来のユークリッド空間内の極小曲面においては Schwarz の剛性定理「互いに等長な 2 つの単連結極小曲面は一方が他方の同伴族に含まれるいずれかの曲面と合同になる」が知られていた。本研究により時間的極小曲面は剛性の現れ方が極小曲面の場合とは異なることを解明した。とくにミンコフスキー時空内の時間的極小曲面の組で、互いに等長だが、一方が他方の同伴族と呼ばれる等長類のどの要素とも合同にはならないものを見出した。また、同様の考察を反等長類に対しても行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Akamine Shintaro, Fujino Hiroki	4. 巻 -
2. 論文標題 Duality of boundary value problems for minimal and maximal surfaces	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Communications in Analysis and Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akamine Shintaro, Fujino Hiroki	4. 巻 201
2. 論文標題 Extension of Krust theorem and deformations of minimal surfaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -)	6. 最初と最後の頁 2583 ~ 2601
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10231-022-01211-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akamine Shintaro, Fujino Hiroki	4. 巻 77
2. 論文標題 Reflection Principles for Zero Mean Curvature Surfaces in the Simply Isotropic 3-space	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Results in Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00025-022-01718-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akamine Shintaro, Honda Atsufumi, Umehara Masaaki, Yamada Kotaro	4. 巻 155
2. 論文標題 Null hypersurfaces in Lorentzian manifolds with the null energy condition	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 103751 ~ 103751
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.geomphys.2020.103751	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akamine Shintaro, Fujino Hiroki	4. 巻 59
2. 論文標題 Reflection principle for lightlike line segments on maximal surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annals of Global Analysis and Geometry	6. 最初と最後の頁 93 ~ 108
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10455-020-09743-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Akamine, J. Cho and Y. Ogata	4. 巻 30
2. 論文標題 Analysis of timelike Thomsen surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The Journal of Geometric Analysis volume	6. 最初と最後の頁 731 ~ 761
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12220-019-00166-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akamine S., Umehara M., Yamada K.	4. 巻 7
2. 論文標題 Improvement of the Bernstein-type theorem for space-like zero mean curvature graphs in Lorentz-Minkowski space using fluid mechanical duality	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society, Series B	6. 最初と最後の頁 17 ~ 27
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/bproc/44	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 S. Akamine, A. Honda, M. Umehara and K. Yamada	4. 巻 先行電子出版
2. 論文標題 Bernstein-type theorem for zero mean curvature hypersurfaces without time-like points in Lorentz-Minkowski space	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series	6. 最初と最後の頁 1 ~ 7
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00574-020-00196-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計30件（うち招待講演 15件 / うち国際学会 7件）

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 ミンコフスキー空間内の時間的極小曲面の等長類と反等長類について
3. 学会等名 千里山幾何学研究会（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 ミンコフスキー空間内の時間的極小曲面に関する剛性と対称性について
3. 学会等名 多様体上の微分方程式（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 Krustの定理の拡張と極小曲面の変形について
3. 学会等名 東工大幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 ミンコフスキー空間内の時間的極小曲面に関する剛性と対称性について
3. 学会等名 横国大幾何トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 3次元ミンコフスキー空間内の時間的極小曲面について
3. 学会等名 第10回室蘭連続講演会（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 赤嶺新太郎，藤野弘基
2. 発表標題 Krustの定理の拡張と極小曲面の変形について
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 平均曲率零曲面論と調和関数論
3. 学会等名 トポロジープロジェクト研究集会「接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺」（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 Krustの定理の拡張と極小曲面の変形について
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用 2022（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shintaro Akamine
2. 発表標題 Deformation of zero mean curvature surfaces and its application
3. 学会等名 Discussion meeting on zero mean curvature surfaces in the Lorentz-Minkowski space and related areas (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shintaro Akamine
2. 発表標題 Extension of Krust theorem and deformations of minimal surfaces
3. 学会等名 The 3rd Conference on Surfaces, Analysis, and Numerics, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 極大曲面に対する鏡像の原理と関連する話題について
3. 学会等名 広島大学トポロジー・幾何セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 極大曲面に対する鏡像の原理について
3. 学会等名 第68回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shintaro Akamine
2. 発表標題 Reflection Principles for Minimal and Maximal Surfaces (poster)
3. 学会等名 The 21st International Conference on Discrete Geometric Analysis for Materials Design (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 Krustの定理の拡張と極小曲面の変形について
3. 学会等名 第23回多様体上の微分方程式
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 Krustの定理の拡張と極小曲面の変形について
3. 学会等名 横浜幾何学小研究会2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shintaro Akamine
2. 発表標題 Zero mean curvature surfaces with lightlike points
3. 学会等名 Workshop on Surface Theory -UY60- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 赤嶺新太郎, 藤野弘基
2. 発表標題 単葉調和関数および極小曲面・極大曲面に対する境界値問題の対応
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会, 一般講演
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 極大曲面の特異点と鏡像の原理について
3. 学会等名 幾何や自然科学に現れる特異点
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 赤嶺新太郎, 藤野弘基
2. 発表標題 極大曲面の光的線分に関する鏡像の原理について
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会, 一般講演
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 極大曲面の光的線分に関する鏡像の原理と関連する話題について
3. 学会等名 神戸幾何学セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 平均曲率零曲面上の光的点について
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「部分多様体論の諸相と他分野との融合」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 平均曲率零曲面上の光的点について
3. 学会等名 第66回幾何学シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 S. Akamine
2. 発表標題 Duality of boundary value problems for minimal and maximal surfaces
3. 学会等名 Geometry Seminar, Vienna University of Technology (Austria)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 極小曲面と極大曲面に対する境界値問題の双対性
3. 学会等名 部分多様体論・湯沢2019(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 S. Akamine
2. 発表標題 Fluid Mechanical Duality for Minimal Surfaces in Euclidean Space and Maximal Surfaces in Spacetime (poster presentation)
3. 学会等名 MATERIALS RESEARCH MEETING 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 Duality of boundary value problems for minimal and maximal surfaces
3. 学会等名 東工大幾何セミナー
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 赤嶺新太郎
2. 発表標題 極大曲面に対する光的境界値問題について
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会2020
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 S. Akamine
2. 発表標題 Duality of boundary value problems for minimal and maximal surfaces
3. 学会等名 Workshop and School on Geometric Analysis and Discrete Geometry, Korea Institute for advanced Study (KIAS) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 S. Akamine
2. 発表標題 Bernstein-type theorem for zero mean curvature hypersurfaces admitting lightlike points
3. 学会等名 The closing workshop of the project “Geometric Shape Generation” (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 赤嶺新太郎, 本田淳史, 梅原雅頭, 山田光太郎
2. 発表標題 光的点を許容する平均曲率零超曲面に対するBernstein型定理
3. 学会等名 日本数学会2020年度年
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis	開催年 2022年 ~ 2022年
--	----------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------