

令和 6 年 6 月 25 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14528

研究課題名（和文）線形スケイン理論による量子群の表現圏の計算と量子トポロジーへの応用

研究課題名（英文）Calculations of representation categories of quantum groups by linear skein theory and its applications to quantum topology

研究代表者

湯浅 亘（Yuasa, Wataru）

京都大学・理学研究科・特定助教

研究者番号：80824961

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）： $sl(3)$ の最高ウェイトが $(n,0)$ の既約表現で色付けされたジョーンズ多項式において adequateな絡み目に対するtailの存在を示した。また、 $sp(4)$ についても最高ウェイト $(n,0)$ 、 $(0,n)$ の既約表現で色付けされた $(2,m)$ -トーラス絡み目のtailを得た。石橋典氏との共同研究で $sl(3)$ 、 $sp(4)$ のクラス付きスケイン代数が $sl(3)$ 、 $sp(4)$ から構成される曲面の量子クラスター代数へ埋め込まれることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

高階の結び目の tail の明示式については、 $sl(3)$ の場合にトーラス絡み目の tail が頂点作用素代数のある表現に関する指標と対応することが示された。そのため $sp(4)$ において得られた tail が同様に頂点作用素代数の指標で得られる可能性がある。更に、量子クラスター代数との対応では例外型リー代数 $g(2)$ に関しても同様の研究を進めており、これら rank 2 の場合の対応からさらに高階の対応についての研究の指標となる。また、クラスター代数はFock-Goncharovによる曲面の局所系のモジュライ空間の関数環に対応していることから、モジュライの研究への応用も見込まれる。

研究成果の概要（英文）：We show the existence of tails of the $sl(3)$ Jones polynomials colored by irreducible representations with the highest weight $(n,0)$ for adequate links. For $sp(4)$, we obtained an explicit formula of tails for $(2,m)$ -torus links colored by irreducible representations of the highest weights $(n,0)$ and $(0,n)$. In collaboration with Tsukasa Ishibashi, we showed that the clasped skein algebras of $sl(3)$ and $sp(4)$ can be embedded into the quantum cluster algebras of marked surfaces associated with $sl(3)$ and $sp(4)$.

研究分野：量子トポロジー

キーワード：スケイン関係式 スケイン代数 クラスター代数 色付きジョーンズ多項式 量子不変量 曲面のモジュライ空間

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

これまでの研究で、 $sl(3)$ のある特別な表現から得られる結び目の量子不変量をウェブという図やヤング図形との対応を用いて計算していた。これらの研究によって $sl(3)$ における false theta 級数の2つの表示を得ることができた。そして、この研究成果について表現論や数論の分野の研究者から興味を持っていただいていた。同様の手法をより高階のリー代数 $sl(n)$ の特別な表現へ一般化したり、 $sl(3)$ のより一般の表現から得られる結び目の不変量を計算できそうな手がかりを得ていた。また、この研究がうまく進展することで自身の専門とする低次元トポロジー以外の分野にも貢献できるのではないかと期待があった。

2. 研究の目的

量子表現の圏における射を図で表すウェブや、スピネットワークを用いて $sl(n)$ の量子不変量の明示的な計算を行う。また、これまで $sl(3)$ のウェブやスピネットワークで得られていた重要な公式などを $sl(n)$ へと一般化する。そして、これらの結果の応用として、(false) theta 級数に対応する結び目の色付き $sl(n)$ ジョーンズ多項式の極限を計算することで、数論や表現論などの他分野へ低次元トポロジーからアプローチする。また、トポロジカル量子計算などウェブを用いる数理物理・応用数学への応用を目指す。

3. 研究の方法

高階の単純リー代数に関して基本表現で色付けされた三価グラフであるウェブを用いて、既約表現への射影子であるクラスプを構成する。そして、既約表現で色付けされた三価グラフであるスピネットワークをウェブで表すことによって重要なグラフ(シートグラフや四面体グラフ)に関する値を求める。これらの公式を用いることで、明示的な結び目の量子不変量の公式を得る。また、既約表現で色付けされた2本のブレイドに関するフルツイスト公式を得ることで、 $(2, n)$ -トーラス絡み目から得られる Andrews-Gordon 型の恒等式を導出し、頂点作用素代数の指標と関係性を調べる。さらに、この量子スピネットワークの公式を用いて量子パラメータを1の冪根に特殊化することで得られる写像類群の量子表現の明示的な計算や、トポロジカル量子計算を行う。

4. 研究成果

1. まずは研究課題にある量子不変量の計算に関する結果を述べる。

$sl(3)$ の場合に関して、1行のウェイト $(n, 0)$ で色付けされたフルツイスト公式を得た。そして、これらの公式を用いて $(2, m)$ -トーラス絡み目の $(n, 0)$ -色付き $sl(3)$ ジョーンズ多項式の明示式を導出し、その極限である tail を求めた。この明示式は後に Bringmann-Kaszian-Milas(2019)や Kanade(2023)で頂点作用素代数の指標として現れることが確かめられている。しかし、理論的な背景はまだ不明な点が多い。また、adequate 絡み目を向き付けられた絡み目に拡張したクラスの絡み目について、 $(n, 0)$ -色付き $sl(3)$ ジョーンズ多項式の極限である tail が存在することを証明した。これまで明示的な公式から、いくつかの例でしか $sl(3)$ の tail は知られていなかったが、この結果によって非常に沢山の tail の存在が示された。

$sp(4)$ についても1行のウェイト $(n, 0)$ または $(0, n)$ についてフルツイストに関する公式を得て、 $(2, m)$ -トーラス絡み目に関する色付き $sp(4)$ ジョーンズ多項式の明示的な公式を得た。これについては、頂点作用素代数との関係もまだわかっておらず、論文を準備している段階である。

これらの研究は、近年量子トポロジー、数論、数理物理、表現論において活発に研究されている量子不変量と量子モジュラー形式の研究の発展に寄与するものであり、今後も興味の耐えない研究課題であると考えている。とくに、最近では国内においても数論の若手研究者たちが興味を持って研究結果を発表している分野であり、今後の発展が期待される。

2. 石橋典氏との議論の中で曲面上のウェブを考えて得られるスケイン代数と量子クラスター代数の関係に関する新たな研究課題が浮上した。この研究課題については、いくらか計算を進めるとこれまでのウェブの計算を用いて研究がうまく進展しそうだという結論に至り、本来の研究課題から少し違うものになるが、スケイン代数と量子クラスター代数の研究を先に進めることにした。ただし、将来的には曲面の写像類群の量子表現を考える際には、曲面のスケイン代数への作用を考えるため、本来の研究課題にも繋がるものだと考えて研究を進めた。この研究の発端となるのは Muller(2016)によって $sl(2)$ -ウェブを用いて示された、境界に指定点をもつ曲面のスケイン代数と量子クラスター代数が同型になるという結果である。このスケイン代数と量子クラスター代数の対応を高階の単純リー代数に拡張す

るのが、石橋氏との研究の目的である。そして、得られた主な結果は以下のものになる。

$sl(3)$ -ウェブで構成される曲面のスケイン代数の分数体の中に $sl(3)$ に付随するクイバーから構成される曲面の量子クラスター代数を構成した。そして、 $sl(3)$ -ウェブをクラスター変数で展開する事によってスケイン代数が $sl(3)$ の量子クラスター代数に含まれることを示した。この包含関係の構成は Muller (2016) の手法と全く違うものであり、一般の単純リー代数においてもある程度有効なものであると考えている。また、標高保存ウェブというクラスのウェブについて、三角形分割に付随するクラスターで展開したときの係数が正整数を係数とするローラン多項式環になることを示した。これはクラスター代数において重要である正值性の問題につながる。

$sp(4)$ -ウェブで構成される曲面のスケイン代数の整形式という部分代数を定義して、その部分代数が $sp(4)$ に付随するクイバーから構成される量子クラスター代数に含まれることを示した。こちらもと同様にまず、スケイン代数の分数体の中に量子クラスター代数を構成して、ウェブをクラスター変数で展開することによってスケイン代数が量子クラスター代数に含まれることを示した。この研究では $sp(4)$ における自然に定義されるスケイン代数の係数環と量子クラスター代数の係数環の間に差異がある点が、これまでの研究ではなかった点である。しかし、同じ係数環をもつ部分代数を定義することでうまく対応を構成できた点が非常に興味深い。このスケイン代数の整形式は、今後表現論との対応をより精密に考えていくうえで重要な概念であると思われる。

上の で取り扱ったスケイン代数は、そのウェブの端点が射影子に対応するクラスプにあるため、クラスプ付きスケイン代数と読んでいい。一方で、スケイン代数から量子タイヒミュラー空間への写像である量子トレースを構成する際に用いたステイトを一般化することでえられるステイト付きスケイン代数というものがある。石橋氏と、この2つのスケイン代数についてステイト-クラスプ対応という同型対応を rank 2 の場合に構成した。これに関しては現在論文執筆中である。

量子クラスター代数については係数という概念が考えられている。この係数という概念に対応するスケイン代数の概念はなかったわけだが、wall-system という曲面の付加構造を考えることで、 $sl(2)$ の場合に係数に対応する概念をスケイン代数に導入した。そして、そのようにして得られた $sl(2)$ のスケイン代数と係数付き量子クラスター代数の間の同型を構成した。これは Muller (2016) の結果を係数付きに拡張した石橋氏、狩野氏との共同研究である。

これらの研究については、非常に活発に海外の研究者たちが研究を行っており競争も激しい分野になっている。しかし、本研究のように高階で具体的にスケイン代数とクラスター代数に対応を与えている論文は他にないため、重要な役割を果たしていると考えている。そして、その対応の構成も一般での対応を示唆するようなものである。今後、高階の理論が発展していく上で、今回扱った rank 2 の理論というのはそれらの研究の基礎となるものだと考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Tsukasa Ishibash, Wataru Yuasa	4. 巻 -
2. 論文標題 Skein and cluster algebras of unpunctured surfaces for sp_4	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 arXiv preprint	6. 最初と最後の頁 57 pages
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Wataru Yuasa	4. 巻 -
2. 論文標題 The zero stability for the one-row colored sl_3 -Jones polynomial	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Algebra & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Tsukasa Ishibashi, Kano Shunsuke and Wataru Yuasa	4. 巻 -
2. 論文標題 Skein and cluster algebras with coefficients for unpunctured surfaces	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 arXiv preprint	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Ishibashi Tsukasa, Yuasa Wataru	4. 巻 303
2. 論文標題 Skein and cluster algebras of unpunctured surfaces for sl_3	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 60 pages
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-023-03208-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuasa Wataru	4. 巻 -
2. 論文標題 Twist formulas for one-row colored A_2 webs and sl_3 tails of $(2, 2m)$ -torus links	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Acta Mathematica Vietnamica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40306-020-00397-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計25件 (うち招待講演 21件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 Wataru Yuasa
2. 発表標題 Cluster and Skein algebras of unpunctured surfaces for sp_4
3. 学会等名 Skein Algebra and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Wataru Yuasa
2. 発表標題 State-clasp correspondence of skein algebras
3. 学会等名 Geometry, Algebra and Physics Seminar at KIAS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Wataru Yuasa
2. 発表標題 Skein and cluster algebras with coefficients for unpunctured surfaces
3. 学会等名 Advances in Cluster Algebras 2024 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 Skein and cluster algebras of marked surfaces without punctures for sp_4
3. 学会等名 大阪大学トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 Skein and cluster algebras of marked surfaces without punctures for sp_4
3. 学会等名 南大阪代数セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 State-clasp correspondence for skein algebras
3. 学会等名 Friday Seminar on Knot Theory（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 State-clasp correspondence for skein algebras
3. 学会等名 The 13th KOOK-TAPU Joint Seminar on Knots and Related Topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 曲面のスkein代数と量子クラスター代数
3. 学会等名 トポロジーシンポジウム2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 Cluster and skein algebras of marked surfaces without punctures for sp_4
3. 学会等名 Mapping class groups and Quantum topology (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 Cluster and skein algebras of marked surfaces without punctures for sp_4
3. 学会等名 Advances in Cluster Algebras 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 Skein and cluster algebras of marked surfaces without punctures for sl_3
3. 学会等名 広島大学 トポロジー・幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 Skein and cluster algebras of marked surfaces without punctures for sl_3
3. 学会等名 拡大 KOOK セミナー 2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 Skein realization of cluster algebras with coefficients from marked surfaces
3. 学会等名 Infinite Analysis 21 workshop Around Cluster Algebras (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 Skein and cluster algebras of marked surfaces without punctures for sl_3
3. 学会等名 東京大学 トポロジー火曜セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 Stated and marked skein algebras
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 Zero stability for the one-row colored sl_3 Jones polynomial
3. 学会等名 東工大トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 Zero stability for the one-row colored sl_3 Jones polynomial
3. 学会等名 Friday Seminar on Knot Theory（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 The tail of the one-row colored sl_3 Jones polynomial and the Andrews-Gordon type identity
3. 学会等名 表現論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 色付きジョーンズ多項式の tail と q -級数
3. 学会等名 Friday Tea Time Zoom Seminar（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 Filtered and graded sl_3 -skein algebras of marked surfaces without punctures
3. 学会等名 Hurwitz action online フルピッツ作用とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 Twist formulas for one-row colored A_2 webs and sl_3 tails of $(2,2m)$ -torus links
3. 学会等名 Intelligence of Low-dimensional Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 Skein and cluster algebras of marked surfaces without punctures for sl_3
3. 学会等名 Quantum Geometry and Representation Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 Categorification of two-variable Chebyshev polynomials via linear skein theory
3. 学会等名 結び目の数理II
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 A full twist formula for the A_2 skein colored with (m,n) and $(k,0)$
3. 学会等名 ひねる代数 ~Hurwitz actionとその周辺~ (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 湯浅巨
2. 発表標題 The $sl(3)$ colored Jones polynomial of $(2,m)$ -torus links and its tails
3. 学会等名 The 15th East Asian Conference on Geometric Topology (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

湯浅巨のホームページ https://wataruyuasa.github.io/math/ 結び目の数理論II, スライドと報告集原稿 http://www.math.chs.nihon-u.ac.jp/~ichihara/Knots2019/index.html#yuasa

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------