

令和 6 年 5 月 7 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14530

研究課題名（和文）双曲構造の変形と非離散的表現の幾何

研究課題名（英文）Deformation of hyperbolic structures and geometry of non-discrete representations

研究代表者

吉田 建一（Yoshida, Ken'ichi）

広島大学・持続可能性に寄与するキラルノット超物質国際研究所・特任准教授

研究者番号：70793371

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、錐構造などの完備でない双曲構造の変形に基づいて、3次元多様体の基本群の表現空間を幾何学的に考察した。成果として、3次元双曲錐多様体の変形の際に、錐角が減少するにも関わらず退化する例をトーラス上の交代絡み目から得た。これに関連して、変形の際の特異集合の交差を回避するために、錐構造の一般化となる穴あき錐構造を定義した。

さらに、トーラス上の絡み目の普遍被覆として得られる二重周期絡み目について考察した。トーラス上の絡み目の有限被覆とイソトピーの関係についての結果を、絡み目の補空間の幾何構造を利用することにより示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

錐角減少変形での双曲錐構造の退化は特殊な現象ではないはずだが、具体的な初めての記述である。この例は双曲錐構造の変形を考える上で重要だと考えられる。錐構造の一般化は、基本群の表現を幾何学的に表すことができる範囲が増えるので、双曲錐構造の大域的な剛性を考察する上で役立つと考えられる。

また、二重周期絡み目はテキスタイルの構造を表すので、応用研究としての価値もあると考えられる。

研究成果の概要（英文）：In this research, we geometrically investigated the representation spaces of the fundamental groups of 3-manifolds, based on deformation of incomplete hyperbolic structures, such as cone structures. As results, we obtained an example that degeneration of hyperbolic cone structures with decreasing cone angles. In connection with this, we define holed cone structure as a generalization of cone structure to avoid the intersection of singular loci during deformation. Furthermore, we investigated doubly periodic tangles obtained as the universal coverings of links in the thickened torus. We obtained results on relations between finite coverings and isotopies of links in the thickened torus by using geometric structures on the complements of links.

研究分野：位相幾何学

キーワード：双曲的デーン手術 有限被覆 双曲錐構造 指標多様体 トーラス上の絡み目

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

双曲構造は3次元多様体の幾何構造のうち最も一般的に現れる種類である。向きづけられた3次元多様体の完備な双曲構造は、基本群の離散的かつ忠実な  $PSL(2, \mathbb{C})$  表現に対応する。また、指標多様体と呼ばれるアファイン代数多様体が、群の表現の共役類のなす空間として定まる。すると、双曲構造の変形空間は指標多様体に含まれるとみなせる。

指標多様体の点には、対応する表現の像が離散的であるもの(離散指標)もある。この場合には対応する3次元双曲多様体を得られるので、幾何的に記述できていることになる。ここで、離散指標からなる部分集合は一般的には連結でない。そのため連続的に変形しようとするとき離散的でない表現を経由することになる。離散的でない表現は完備な双曲構造には対応しないが、特異性を許す双曲構造によって実現される場合がある。

有限体積3次元双曲多様体にはモストフ剛性があり、位相から等長類が決まるので、完備なままでは変形できない。しかし、カスプの周りでは完備でないような双曲構造を考えることによって変形が可能になる。これを指標多様体の中で考えると、完備な双曲構造のホロノミー表現の近傍に、忠実ではないが離散的な表現が無数存在する。これらの表現は、カスプをソリッドトラスで埋めてできる3次元多様体の完備な双曲構造に対応する。このようにして双曲構造の変形によって新しい3次元双曲多様体を作ることができる。このことを双曲的デーン手術という。さらに、双曲的デーン手術において、特異性を許した双曲構造をもつ錐多様体を通して変形を幾何的に記述できる。つまり、変形の途中の離散的でない表現を、双曲錐多様体のホロノミー表現として幾何的に実現することができる。

また、幾何的有限無限体積の3次元双曲多様体を見ると、双曲構造の非自明な変形が存在する。幾何的有限な双曲構造は境界の共形構造から定まるので、幾何的有限な型を保つ範囲での変形空間は、境界となる曲面のタイヒミュラー空間に対応する。これによりタイヒミュラー空間が指標多様体の内部に埋め込まれているとみなせる。このときタイヒミュラー空間の境界はカスプつきまたは幾何的無限な双曲多様体に対応し、エンディングラミネーションという位相的な機構で記述できる。幾何的有限な3次元双曲多様体の重要な類として、測地的境界をもつものが挙げられる。

### 2. 研究の目的

本研究では、非離散的な表現であっても幾何学的に考察することにより、指標多様体を理解することを目的とした。そのために、以下のことを行うことを目標とした。

- (1) 双曲的デーン手術における変形空間を詳細に記述する。
- (2) 双曲錐多様体の変形を具体的に記述する。
- (3) 双曲的デーン手術の理論を、測地的境界をもつ3次元双曲多様体についての表現の変形に対して拡張する。

### 3. 研究の方法

境界をもつ3次元多様体について、基本群の表現と幾何構造の変形の間を考察する。具体的には、多面体の貼り合わせなどによって、幾何構造の変形を構成する。この際にコンピュータによる数値実験も参考にする。また、幾何構造を一般化することにより、変形空間のうち幾何学的に表される範囲を広げる。さらに、3次元多様体の有限被覆をとったときに幾何構造の変形空間がどのように対応するかを調べる。例として、トラス上の絡み目(トラスと閉区間の直積内の絡み目)を考える。

### 4. 研究成果

測地的境界をもつ3次元双曲多様体についての表現の変形空間に対しては研究が進まなかったが、本研究では以下の成果を得た。

(1) 個々の有限体積3次元双曲多様体を点とする空間の位相が双曲的デーン手術により定まる。この空間について有限被覆との関係から考察した。結果として、有限被覆による通約類をとったときの商位相が正規ハウスドルフであることを示した。これにより、各通約類が3次元双曲多様体全体の空間の中である程度まばらに分布しているといえる。

(2) 3次元双曲錐多様体の変形を考察した。3次元双曲錐多様体の大域的な剛性は錐角が以下の場合について知られていて、このことは錐角を0まで減少させる変形が存在することにより証明される。より強く、錐角が以下の場合はどのように錐角を減少させても退化

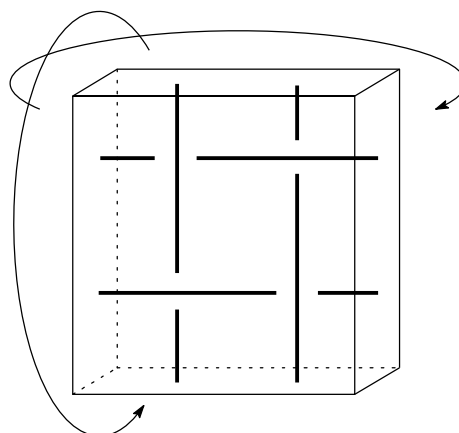


図1 トラス上の交代結び目

しないことが知られていた。しかし、錐角が  $\pi/2$  と  $\pi$  の間にある場合に、錐角が減少するにもかかわらず退化する例を構成した。この例は、図 1 のトーラス上の交代絡み目から得られる。双曲錐構造はねじれ双角錐と呼ばれる多面体の貼り合わせによって具体的に構成でき、双曲錐構造の記述はその双曲的な多面体の等長類を決定することに帰着できる。また、退化は特異集合が変わることによって起こる。錐角減少変形での退化は特殊な現象ではないはずだが、具体的な初めでの記述である。この例は、双曲錐構造の変形を考える上で重要だと考えられる。

(3) 双曲錐構造の変形の際の特異集合の交差を回避するために、錐構造の一般化となる穴あき錐構造を定義した。(2)の例に対しては、 $\pi/2$  より小さい任意の錐角を実現できるようになる。基本群の表現を幾何学的に表すことができる範囲が増えるので、錐構造の大域的な剛性を考察する上でも役立つと考えられる。一般論として、穴あき錐構造のホロノミー表現を錐構造と同様に定義することができ、既約なホロノミー表現の変形に対応して穴あき錐構造を変形させることができることを示した。また、同じ表現に対応する穴あき錐構造がどのくらいあるかを記述することもできた。さらに、穴あき錐構造の体積を定義し、基本群のホロノミー表現から定まる体積と一致することを示した。

(4)

小鳥居祐香氏(広島大)、Sonia Mahmoudi 氏(東北大)、Elisabetta Matsumoto 氏(ジョージア工科大)と共同で、トーラス上の絡み目の普遍被覆として得られる二重周期的な絡み目について考察した。この研究はテキスタイルの構造の分類という応用研究との関連も見据えている。トーラス上の絡み目の有限被覆をとったものから出発しても同じ二重周期的な絡み目が得られるので、トーラス上の絡み目の有限被覆とイソトピーの関係が問題となる。結果として、トーラス上の 2 つの絡み目が共通の有限被覆をとったときにイソトピックならば、元の絡み目もイソトピックであることを示した。また、分離しない二重周期的な絡み目に対しては、有限被覆に関して最小となるトーラス上の絡み目が存在することも示した。証明にあたっては、絡み目の補空間の連結分解と JSJ 分解によりザイフェルトファイバー構造が入る部分と双曲構造が入る部分に分けて議論する。この結果は、より一般の 3 次元多様体内の絡み目の有限被覆とイソトピーについての問題を考える出発点になる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Yoshida Ken'ichi	4. 巻 26
2. 論文標題 Degeneration of 3-dimensional hyperbolic cone structures with decreasing cone angles	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Conformal Geometry and Dynamics of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 182 ~ 193
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/ecgd/375	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yoshida Ken'ichi	4. 巻 272
2. 論文標題 Quotient topology on the set of commensurability classes of hyperbolic 3-manifolds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107091 ~ 107091
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107091	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件（うち招待講演 9件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 吉田建一
2. 発表標題 多面体による双曲錐多様体の構成・変形・退化
3. 学会等名 広島大学トポロジー・幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 吉田建一
2. 発表標題 Textile structures and links in the thickened torus
3. 学会等名 数学と諸分野の連携に向けた若手数学者交流会 (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 吉田建一
2. 発表標題 Holed cone structures on 3-manifolds
3. 学会等名 京都大学微分トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 吉田建一
2. 発表標題 3次元多様体上の穴あき錐構造
3. 学会等名 結び目の数理V
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 吉田建一
2. 発表標題 Rigidity and degeneration of 3-dimensional hyperbolic cone structures
3. 学会等名 離散群と双曲空間の幾何学（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 吉田建一
2. 発表標題 ある二重周期絡み目における双曲錐構造
3. 学会等名 埼玉大学木曜セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉田建一
2. 発表標題 ある二重周期絡み目における双曲錐構造
3. 学会等名 金沢大学・学習院大学合同トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉田建一
2. 発表標題 錐角減少変形における3次元双曲錐構造の退化の例
3. 学会等名 五箇山トポロジー・幾何セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ken'ichi Yoshida
2. 発表標題 Degeneration of 3-dimensional hyperbolic cone structures with decreasing cone angles
3. 学会等名 Workshop: Hyperbolic Geometry (早稲田大学) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉田建一
2. 発表標題 錐角減少変形における3次元双曲錐構造の退化の例
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉田建一
2. 発表標題 Degeneration of hyperbolic cone structures on a link in the thickened torus
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉田建一
2. 発表標題 錐角減少変形における3次元双曲錐構造の退化
3. 学会等名 大阪大学トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉田建一
2. 発表標題 Degeneration of 3-dimensional hyperbolic cone structures with decreasing cone angles
3. 学会等名 2019年度「リーマン面・不連続群論」研究集会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ken'ichi Yoshida
2. 発表標題 Degeneration of 3-dimensional hyperbolic cone structures with decreasing cone angles
3. 学会等名 The 15th East Asian Conference on Geometric Topology（国際学会）
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	ジョージア工科大学			