

令和 5 年 6 月 27 日現在

機関番号：82723

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14532

研究課題名（和文）一般化された測度距離空間上の曲率次元条件と測度集中

研究課題名（英文）Curvature-dimension condition and measure concentration on generalized metric measure spaces

研究代表者

小澤 龍ノ介 (Ozawa, Ryunosuke)

防衛大学校（総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工学群）・総合教育学群
・講師

研究者番号：80838110

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：リーマン多様体においてリッチ曲率が下に有界であることの同値条件を用いて、測度距離空間における曲率次元条件や無向グラフにおける曲率次元条件やLin--Lu--Yau型リッチ曲率などさまざまな空間へリッチ曲率の下限が拡張され研究されている。本研究では以下の研究を行った。(1) 曲率次元条件をみたす測度距離空間の列の射影極限における曲率次元条件の研究。(2) 有向グラフへLin--Lu--Yau型リッチ曲率を拡張し、比較幾何的な性質を調べた。(3) グラフ上のBakry--Emery型曲率次元条件の改良版である指数型・型曲率次元条件の熱流の勾配評価を用いた特徴付けと超リッチ流への拡張を研究した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題における測度距離空間はリーマン多様体の一般化であり、近年では相対性理論で用いられるローレンツ多様体の一般化になるようなローレンツ的測地空間に測度を考えた空間が導入され、このような空間上での曲率次元条件が研究されている。本研究における空間列の極限が元の空間と同じ性質を満たすかどうかは、我々が住む空間の根本を理解する上での手掛かりになると考えられる。また無向グラフ上の曲率はネットワーク解析などへの応用が期待され、本研究における有向グラフ上のリッチ曲率は情報形のみならず更に他の分野への応用も期待される。

研究成果の概要（英文）：Based on equivalent conditions of lower Ricci curvature bound, the curvature-dimension condition on metric measure spaces and graphs and Lin--Lu--Yau type Ricci curvature on undirected graphs are introduced and investigated. In our study, we have following result. (1) We prove that the projective limit of sequence of metric measure spaces satisfying curvature-dimension condition also satisfies the curvature-dimension condition. (2) We generalize Lin--Lu--Yau type Ricci curvature for directed graphs and investigate the comparison geometry of directed graphs. (3) We have equivalent condition of exponential and -curvature-dimension condition for graphs via gradient estimate of heat flow. We also generalize these curvature-dimension conditions to super Ricci flow.

研究分野：測度距離空間とグラフにおける幾何解析・比較幾何

キーワード：測度距離空間 グラフ 曲率次元条件 リッチ曲率

1. 研究開始当初の背景

2000 年代初頭, Lott—Villani と Sturm による最適輸送理論を用いたリーマン多様体のリッチ曲率の下限条件の特徴付けに関する研究を基にして測度距離空間におけるリッチ曲率の下限である曲率次元条件が導入された。曲率次元条件はリーマン多様体にて成立する様々な幾何的・解析的な主張を導き、測度距離空間における幾何解析が大きく進展した。

また、1990 年代終わりに Gromov は測度集中現象を基にして確率測度をもつ測度距離空間全体の上の位相である集中位相を導入した。集中位相の特徴は、次元が無限大に発散するような空間列の極限を捉えることができることである。例えば n 次元単位球面などの次元に関する列は次元を無限大へ発散させたときに集中位相の意味で 1 点測度距離空間へ収束する。集中位相において次元が無限大へ発散するが極限が非自明なものになるものを構成するのは現時点ではとても難しいが、近年、塩谷は Gromov が導入した集中位相のコンパクト化において半径 \sqrt{n} の n 次元球面の次元に関する列が無限次元ガウス空間に相当する対象へ収束することを示した。しかしながらコンパクト化の元はピラミッドとよばれる測度距離空間の族で表現されるため幾何的・解析的な性質を直接調べることは難しい。

他方で Ollivier は前述の Sturm による最適輸送理論を用いたリーマン多様体のリッチ曲率の下限条件の特徴付けを精密化することにより、ランダムウォーク付きの距離空間に対してコースリッチ曲率を導入した。これは次元の情報は外れてしまっているがそのまま離散的な空間などへも適用でき、他分野への応用が多い。曲率次元条件・コースリッチ曲率は辺重みを持つ無向グラフへ拡張されており、主に Bakry—Emery 型の曲率次元条件と Lin—Lu—Yau 型リッチ曲率が研究されている。Bakry—Emery 型の曲率次元条件は上記の Lott—Villani と Sturm による曲率次元条件と深く関わりがあり、そのグラフ上での定義にはグラフ上の離散ラプラシアンを用いる。また Lin—Lu—Yau 型のリッチ曲率は Ollivier によるコースリッチ曲率をグラフ用に特化させたものである。

2. 研究の目的

本研究では下記の 3 つの研究を目標とした。

- (A) ピラミッドから構成される射影極限とピラミッドの曲率次元条件の導入
- (B) 有向グラフへ Lin—Lu—Yau 型リッチ曲率を拡張し、その比較幾何的な性質の研究
- (C) グラフ上の種々の曲率次元条件の特徴付けの研究と、これらの超リッチ流への拡張

3. 研究の方法

研究(A)：ピラミッドとは前述の通り測度距離空間全体の集合に集中位相を考えた際のコンパクト化の元であり、測度距離空間の族にリブシツツ順序という半順序を考えたものである。任意のピラミッドに対してその中から測度距離空間の列でリブシツツ順序に関しての増大列をとることができ、さらにコンパクト化に埋め込んだ際に元のピラミッドへ収束させることができるのでこのような列について調べる。

研究(B)：Lin—Lu—Yau 型リッチ曲率を山田による先行研究のように拡張すると、比較幾何的な性質を得るのが難しいことが知られている。そこで Chung によって導入された頂点有限な有向グラフに適した Chung ラプラシアンを用いて Lin—Lu—Yau 型リッチ曲率を拡張した。

研究(C)：グラフ上の Bakry—Emery 型曲率次元条件の熱流を用いた特徴付けは Lin—Liu な

どによって示されているが、Bakry—Emery 型曲率次元条件の派生版ではほとんど知られていない。本研究では Munch によるグラフ上での熱作用素と平方場作用素の関係式を用いて研究を進める。

4 . 研究成果

研究(A)：横田巧氏(東北大)と共に測度距離空間のリブシツ順序に関する増大列の射影極限測度距離空間について研究を行った。この射影極限測度距離空間は、Ambrosio—Gigli—Savare による一般化されたポーランド測度空間となることがわかり、無限直積などの無限次元空間も含まれる。Lott—Villani と Sturm により導入された、測度距離空間におけるリッチ曲率の概念である曲率次元条件を増大列の各測度距離空間に仮定すると、その射影極限測度距離空間も曲率次元条件をみたすことが証明できた。しかしながらピラミッドの曲率次元条件に関しては研究が進んでおらず、今後の課題である。

研究(B)：櫻井陽平氏(埼玉大)・山田大貴氏(島根大)と共に以下の 3 つの研究を行った。辺重みを持つ有向グラフへ比較幾何を行えるよう Lin—Lu—Yau 型のリッチ曲率を拡張する研究を行った。グラフ上でリッチ曲率に関わる幾何解析を展開するにはラプラシアンが重要であるが、Chung による頂点有限な有向グラフ上の Chung ラプラシアンに適合するようにリッチ曲率を拡張した。この設定の下、カルテシアン積のリッチ曲率の公式・ラプラシアンの比較定理・ p -ラプラシアンの距離球の外側でのディリクレ固有値の評価などの研究を行った。この研究成果は Calc. Var. Partial Differential Equations 59 (2020), no.4, Paper No.142 に掲載された。また有向グラフのリッチ曲率が下に有界であることと、熱流に関する勾配評価、熱流に関する収縮性が互いに同値であることを示した。応用として有向グラフ上の 1-リブシツ関数に対する測度集中不等式を得た。この研究成果は Potential Anal (2022) に掲載された。最後にリーマン幾何学における Cheng の最大直径定理に相当する主張を示した。リッチ曲率 K 以上の有向グラフの直径が $2/K$ となると、全ての頂点は直径を実現する 2 つの頂点の間の最短経路上にあるという主張を示した。この研究成果は Comm. Anal. Geom へ掲載が決定した。

研究(C)：櫻井陽平氏(埼玉大)・山田大貴氏(島根大)と共にグラフのリッチ流の不等式版である超リッチ流の特徴づけの研究を行なった。グラフ上の曲率次元条件は Bakry—Emery 型曲率次元条件・指数型曲率次元条件・型曲率次元条件など何種類かあるが、これらを適切に超リッチ流へ拡張した。Lin—Liu などにより Bakry—Emery 型曲率次元条件・指数型曲率次元条件は熱半群の勾配評価と同値であることが示されているが、これらの拡張として我々が導入した超リッチ流でも熱伝播の勾配評価と同値であることを証明した。本研究ではさらに型曲率次元条件の超リッチ流版の勾配評価での特徴付けも得られており、これは曲率次元条件の同値条件としても新しいものである。Bakry—Emery 型曲率次元条件は局所 Poincare 不等式など他の特徴付けを持つが、指数型曲率次元条件・型曲率次元条件では対応する局所 Poincare 不等式の形も不明な状況であり、今後の課題となる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ozawa Ryunosuke, Sakurai Yohei, Yamada Taiki	4. 巻 -
2. 論文標題 Heat flow and concentration of measure on directed graphs with a lower Ricci curvature bound	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Potential Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11118-022-09994-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ozawa Ryunosuke, Sakurai Yohei, Yamada Taiki	4. 巻 -
2. 論文標題 Maximal diameter theorem for directed graphs of positive Ricci curvature	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Analysis and Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ozawa Ryunosuke, Sakurai Yohei, Yamada Taiki	4. 巻 59
2. 論文標題 Geometric and spectral properties of directed graphs under a lower Ricci curvature bound	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00526-020-01809-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ryunosuke Ozawa, Takumi Yokota	4. 巻 58
2. 論文標題 Stability of RCD condition under concentration topology	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00526-019-1586-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Daisuke Kazukawa, Ryunosuke Ozawa, Norihiko Suzuki	4. 巻 72
2. 論文標題 Stabilities of rough curvature dimension condition	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 541-567
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/81468146	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 小澤龍ノ介
2. 発表標題 Lin-Lu-Yau型リッチ曲率が下に有界な有向グラフの幾何解析について
3. 学会等名 日本数学会2021年度秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 小澤龍ノ介
2. 発表標題 リッチ曲率が下に有界な有向グラフの幾何解析的性質
3. 学会等名 第67回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小澤龍ノ介
2. 発表標題 リッチ曲率が下に有界な有向グラフの幾何解析的性質
3. 学会等名 多様体上の微分方程式 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小澤龍ノ介
2. 発表標題 球面の測度集中現象と集中位相
3. 学会等名 Real, Complex and Functional Analysis Seminar 2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小澤龍ノ介
2. 発表標題 測度距離空間列の射影極限とピラミッド
3. 学会等名 リーマン幾何と幾何解析 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小澤龍ノ介
2. 発表標題 リッチ曲率が下に有界な有向グラフの幾何解析的性質
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------