

令和 5 年 4 月 21 日現在

機関番号：12501

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14534

研究課題名(和文)リッチソリトン，山辺ソリトン及び極小部分多様体の一般化の研究

研究課題名(英文)Ricci solitons, Yamabe solitons and a generalization of minimal submanifolds

研究代表者

前田 瞬 (Maeta, Shun)

千葉大学・教育学部・准教授

研究者番号：00709644

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：以下を示した：

1. 安定もしくは縮小完備勾配山辺ソリトンで全スカラー曲率が有限であり立地曲率が非正であるものはリッチ平坦である． 2. 3次元完備勾配山辺ソリトンでダイバージェンスフリーコットンテンソルを持つものを完全に分類． 3. ユークリッド空間内のコンフォーマルソリトン超曲面でソリトン方程式に現れるベクトル場が位置ベクトルの接方向である様なものは超平面，円錐超曲面，超球面のいずれかである． 4. ヘッセソリトンを定義し，コンパクトプロパーなヘッセソリトンは拡大であること，非自明なコンパクト勾配ヘッセソリトンはプロパーである．ヘッセアインシュタインの双対空間がヘッセソリトンである．

研究成果の学術的意義や社会的意義

幾何学的フローはポアンカレ予想を含むサーストンの幾何化予想解決に用いられた非常に強力な手法であり，その自己相似解は重要な役割を担う．本研究は幾何学的フローの自己相似解を研究し，いくつかの分類定理を与えたことに意義がある．また，情報幾何で用いられるヘッセ多様体上の幾何学的フローに対して，その自己相似解といくつかの分類を与えたことに意義がある．

研究成果の概要(英文)：I showed the following:

1. Steady or shrinking complete gradient Yamabe solitons with finite total scalar curvature and non-positive Ricci curvature are Ricci flat. 2. I classified 3-dimensional complete gradient Yamabe solitons with divergence-free Cotton tensor. 3. Any conformal soliton on a hypersurface in a Euclidean space arisen from the position vector field is contained in a hyperplane, a conic hypersurface or a hypersphere. 4. I defined a Hesse soliton, that is, a self-similar solution to the Hesse flow on Hessian manifolds and showed that any compact proper Hesse soliton is expanding and any non-trivial compact gradient Hesse soliton is proper. Furthermore, I showed that the dual space of a Hesse-Einstein manifold can be understood as a Hesse soliton.

研究分野：幾何学

キーワード：山辺ソリトン 部分多様体 コンフォーマルソリトン 双対空間 リッチ曲率 ヘッセ多様体 ヘッセフロー ヘッセソリトン

1. 研究開始当初の背景

リッチソリトンは 1982 年に R. Hamilton により導入されたリッチフロー方程式の自己相似解で、リッチフロー方程式の特異点にあたる。G. Perelman により解決されたポアンカレ予想を含むサーストンの幾何化予想に、リッチフロー方程式が使われたことは記憶に新しい。更に、S. Brendle と R. Schoen により解決された微分球面定理の証明にもこの方程式が用いられた。同じく、山辺ソリトンは山辺フロー方程式の特異点にあたる。山辺フローは山辺の問題、即ち、スカラー曲率に関するある共形不変量を実現する計量の存在を問う問題を研究するために、R. Hamilton により導入された。

Perelman は幾何化予想を証明した論文内で、「非平坦な k 非崩壊完備 3 次元安定リッチソリトンは回転対称、従って、プライアントソリトンになるだろう」と予想した。この問題は多くの研究者により研究されたが、2013 年に極小部分多様体の研究のアイデアをもとに S. Brendle が肯定的に解決した。Brendle は更にその研究を高次元版に発展させ、スカラー曲率に関する条件と、計量に関するある種の仮定のもと、類似の結果を与えた。一方、H.-D. Cao らは共形平坦なリッチソリトンの研究を出発点とし、最終的に、スカラー曲率に関する仮定と、Bach により定義された Bach テンソルが 0 という仮定のもと Perelman 予想の高次元版を部分的に解決した。

以上のように、Perelman 予想の高次元版に対する部分的解決はあるものの、「非平坦な k 非崩壊完備 n 次元安定リッチソリトンは回転対称か？」という問題はまだ残されており、興味深い問題である。Perelman 予想と類似の問題は山辺ソリトンでも考えられる。即ち、「適切な曲率の仮定のもと、完備 3 次元安定山辺ソリトンは回転対称か？」という問題も考えられる。しかし、リッチソリトンはリッチテンソルに関する方程式であり、多くの情報を含むが、山辺ソリトンはスカラー曲率に関する情報しか含まないため、リッチソリトンの研究ほど容易ではない。ところが、H.-D. Cao, X. Sun, Y. Zhang が非自明な共形平坦完備勾配山辺ソリトンは回転対称であることを示した。研究代表者はこの研究をもとに、正のスカラー曲率を持つ非自明非平坦な完備 3 次元勾配山辺ソリトンはある種のテンソルに関する仮定のもと、回転対称であることを示した。従って、この研究を高次元に拡張する研究は興味深いと言える。

2. 研究の目的

本研究の目的は 1. 「完備安定勾配リッチソリトン及び山辺ソリトンの分類」、2. 「部分多様体としてのリッチソリトン、山辺ソリトンの分類」である。

1. 完備安定勾配リッチソリトン、山辺ソリトンについて：

本研究では、これまでの 3 次元での研究を高次元版に拡張する研究をおこなうことが目的である。さらに研究代表者がこれまでに研究してきた極小部分多様体の一般化の技術及びアイデアを応用することを行う。

2. 部分多様体としてのリッチソリトン、山辺ソリトンについて：

極小部分多様体の一般化のアイデアを直接用いるために、部分多様体としてのリッチソリトン、山辺ソリトンの研究を行った。特に、ユークリッド空間、及び双曲空間内の完備リッチソリトン極小超曲面の分類定理を与えた。本研究では引き続き極小部分多様体の一般化のアイデアを元に、部分多様体としてのリッチソリトン、山辺ソリトンの研究も行う。また、得られた結果をリッチソリトン、山辺ソリトンそのものの研究へ応用する。

3. 研究の方法

主に、幾何解析的手法を用いて研究を行った。さらに、これまで一貫して研究を行ってきた極小部分多様体の一般化の研究を応用した。

4. 研究成果

以下の研究結果を得た：

1. (M, g) を安定もしくは縮小完備勾配山辺ソリトンでリッチ曲率が非正とする。このとき、もし、スカラー曲率 $R \in L^p(M)$ ($0 < p < \infty$) であるならば、 M はリッチフラットである。

2. (M, g) を安定もしくは縮小完備勾配山辺ソリトンでスカラー曲率が非正, トレースフリーリッチ曲率が非負であるとする。このとき, もし, スカラー曲率 $R \in L^p(M)$ ($0 < p < \infty$) であるならば, M はリッチフラットである。
3. $m+1$ 次元 ($m \geq 3$)以上の定曲率 C の空間形内のアインシュタイン超曲面が2重調和である必要十分条件は極小もしくは $|A|^2 = mC$ を満たすことである。
4. 球面内のスカラー曲率一定, コンパクト超曲面が2重調和である必要十分条件は極小であるか平均曲率 $H(\neq 0)$ が一定かつ $|A|^2 = m$ である。
5. 非自明非平坦3次元完備勾配山辺ソリトンでダイバージェンスフリーコットンテンソルを持つものを分類した。
6. 完備勾配山辺ソリトンで臨界点を持たないポテンシャル関数のグラディエント方向のリッチ曲率が非正であるとき, 次のことが得られる: (1)縮小もしくは安定の時, スカラー曲率 R が下からソリトン方程式に現れる定数 ρ で抑えられると, $R = \rho$ である。(2)非負のスカラー曲率を持つ拡大ソリトンは存在しない。
7. 完備勾配山辺ソリトンで臨界点を持たないポテンシャル関数のグラディエント方向のリッチ曲率が非正であるものを考える。もし, リッチ曲率が下から抑えられている場合, 次のことが得られる: (1)拡大もしくは安定の時, スカラー曲率 R が上からソリトン方程式に現れる定数 ρ で抑えられると, $R = \rho$ である。(2)非正のスカラー曲率を持つ縮小ソリトンは存在しない。
8. ユークリッド空間内のコンフォーマルソリトン超曲面でソリトン方程式に現れるベクトル場が位置ベクトルの接成分からなるものは超平面, 円錐超曲面, 超球面のいずれかである。
9. コンパクト縮小ヘッセソリトンは存在しない。
10. コンパクト安定ヘッセソリトンはプロパーでなく, かつ自明である。
11. 任意の完備アインシュタインヘッセ多様体で非負アインシュタインコンスタントを持つもので, 第2コシュールフォームが双対空間の第2コシュールフォームと一致する ($\beta = \beta'$)ものはフラットである。
12. ヘッセソリトンで $\beta = \beta'$ を満たすものはソリトン方程式に現れるベクトル場 X が $\text{div } X = 0$ を満たす。
13. 任意のコンパクト非自明勾配ヘッセソリトンはプロパーである。
14. ヘッセアインシュタイン多様体の双対空間はある種のヘッセソリトンである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 7件）

1. 著者名 Tomoya Miura and Shun Maeta	4. 巻 21
2. 論文標題 Triharmonic Riemannian submersions from 3-dimensional space forms	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Geometry	6. 最初と最後の頁 163-168
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/advgeom-2020-0033	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Yu Fu, Shun Maeta and Ye-Lin Ou	4. 巻 294
2. 論文標題 Biharmonic hypersurfaces in a product space $L_m \times R$	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 1724-1741
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/mana.201900457	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Maeta Shun	4. 巻 4
2. 論文標題 Self-similar solutions to the Hesse flow	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Information Geometry	6. 最初と最後の頁 313-327
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s41884-021-00054-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Maeta Shun	4. 巻 58
2. 論文標題 Three-dimensional complete gradient Yamabe solitons with divergence-free Cotton tensor	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annals of Global Analysis and Geometry	6. 最初と最後の頁 227 ~ 237
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10455-020-09722-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Maeta Shun, Ou Ye-Lin	4. 巻 306
2. 論文標題 Some classifications of biharmonic hypersurfaces with constant scalar curvature	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 281 ~ 290
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/pjm.2020.306.281	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Fujii Shunya, Maeta Shun	4. 巻 32
2. 論文標題 Classification of generalized Yamabe solitons in Euclidean spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 2150022 ~ 2150022
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0129167X21500221	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Shun Maeta	4. 巻 66
2. 論文標題 Complete Yamabe solitons with finite total scalar curvature	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 75-81
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.difgeo.2019.05.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 前田瞬
2. 発表標題 ある種の3次元リッチソリトンと山辺ソリトンの分類について
3. 学会等名 筑波大学微分幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 前田瞬
2. 発表標題 divergence-free コットンテンソルを持つ 3 次元完備勾配山辺ソリトン
3. 学会等名 日本数学会 2020 年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 前田瞬
2. 発表標題 ある種の勾配山辺ソリトンとその一般化に対する分類について
3. 学会等名 部分多様体論と幾何解析の新展開 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 前田瞬
2. 発表標題 山辺ソリトンの一般化に対する分類定理とその応用
3. 学会等名 多様体上の微分方程式 (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Shun Maeta's Home Page https://sites.google.com/site/shunmaetahomepage/home

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------