

令和 5 年 5 月 31 日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14535

研究課題名（和文）ファイバーワイズA無限大構造の研究

研究課題名（英文）Study on Fiberwise A-infinity Structures

研究代表者

葛谷 充伸 (Tsutaya, Mitsunobu)

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：80711994

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,300,000円

研究成果の概要（和文）：この研究課題の最大の成果は高次ホモトピー正規性に関する理論をファイバーワイズA無限大構造を用いて構築したことである。今回得られた理論で古典的なファイバーワイズホモトピー論の技術を用いて、準同型が高次ホモトピー正規性を持つかどうか調べることができるようになった。実際、包含写像 $SU(m) \rightarrow SU(n)$ の p -局所的なホモトピー正規性をいくつかの場合に決定した。共同研究で Z と Z 繚語 Roe 代数のユニタリ群のホモトピー型を決定することもできた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

高次ホモトピー正規性はこれまでも研究されてきたが、「本質的に高次の」ホモトピー正規性の理論は得られていなかった。得られた理論では古典的なファイバーワイズホモトピー論の技術を用いて、準同型が高次ホモトピー正規性を持つかどうか調べられる点が強みである。実際、包含写像 $SU(m) \rightarrow SU(n)$ の p -局所的なホモトピー正規性をいくつかの場合に決定した。このように扱いやすさも実証できており、今後の発展が期待できる。一様 Roe 代数のユニタリ群は巨大なホモトピー群を持つ（一様 Roe 代数の K 群と一致）ため難解であるが、実際にホモトピー型を調べる手法を与えた。距離を考慮したトポロジーへの応用も期待できる。

研究成果の概要（英文）：The most important result of this project is the development of the theory of higher homotopy normality using fiberwise A-infinity structures. Though higher homotopy normality has been studied by several people, there are no theory of "essentially higher" homotopy normality. The theory established in this project is a candidate for such theory. It enables us to determine when a given homomorphism has higher homotopy normality by the classical technique in the fiberwise homotopy theory. Indeed, the p -local higher homotopy normality of the inclusions $SU(m) \rightarrow SU(n)$ are determined for some m, n and p . We also obtained some results on the homotopy type of the unitary groups of some uniform Roe algebras in a joint work. Comparing to Roe algebras, uniform Roe algebras tend to have huge K -theory. We could determine the homotopy type of the unitary groups of uniform Roe algebras on Z and Z .

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：ホモトピー論 ファイバーワイズホモトピー論 A無限大空間 crossed module

1. 研究開始当初の背景

A 無限大構造は二項演算の高次ホモトピー結合性を記述するために Stasheff 氏によって 1960 年代に導入された。高次ホモトピーはホモトピー論においては自然な概念だが、近年は他分野でも A 無限大的な対象が見つかり、より一般的なオペラッド上の代数とともに盛んに応用されている。

ファイバーワイズ A 無限大構造は 2010 年に酒井氏によって導入された。もともと LS カテゴリーと A 無限大構造の間に関係があることは岩瀬氏によって指摘されており、そのファイバーワイズ版を考えるとということが動機であった。位相空間 X に対し位相的複雑さ $TC(X)$ と呼ばれるホモトピー不変量が定義されるが、これは LS カテゴリーのある種のファイバーワイズ版ととらえられることも動機だったようである。一方で研究代表者はゲージ群の A 無限大型の研究のために全く異なる文脈でファイバーワイズ A 無限大構造を扱っていた。そういった中で岩瀬氏、酒井氏とともにファイバーワイズ A 無限大構造を用いた $TC(X)$ の計算に使えるモデルを与えたが、ファイバーワイズ A 無限大構造は基礎理論について正確に記述された文献が無く、何が成立するかよくわからないところも多々あった。

また、位相群のホモトピー論一般においては、Lie 群のホモトピー論は Lie 群やその分類空間などの関連する空間のコホモロジー環のような古典的な話題を始めとして、高次ホモトピー可換性のような最近の話題もかなりの部分が理解されてきている。一方で他の位相群にそのまま応用できない議論も多く（ルート系や表現論を用いるなど）、無限次元 Lie 群（微分同相群、ゲージ変換群、 C^* 代数のユニタリ群など）を始めとした対象についてはまだまだ不明な部分も多く、こういった群を構造群にもつ主束の特性類すらわかっていないことも多い。

2. 研究の目的

本研究課題ではファイバーワイズ A 無限大構造に関する基礎理論を構築し、位相的複雑さの計算をさらに進めるための代数モデルを与え、計算を実際に行うことを目的として研究を始めた。しかし、ファイバーワイズな対象と群作用がホモトピー論的には同値であることに着目して研究を進めていくうち、ファイバーワイズ A 無限大構造を用いて高次ホモトピー正規性を記述できることに気付いた。高次ホモトピー正規性はホモトピーファイバー列の高次ホモトピー構造に関わるホモトピー論の極めて基本的かつ重要な問題であるので、そちらの研究にも取り組むことにした。

また、合わせて他の位相群の A 無限大構造についても関連する研究者と連携して適宜研究を行うことを目的とした。

3. 研究の方法

A 無限大構造が射影空間を用いて記述された（Stasheff 氏の結果）ことのファイバーワイズ版に着目し、理論の構築及び計算を行うことを当初より考えていた。また、ファイバーワイズ A 無限大構造は適当な意味で「群作用について同変な A 無限大構造」とホモトピー論的には同値であるので、群作用との関係も調べる。これらの基礎理論を記述し、実際の応用例を与えることでその有用性を示すことにした。

また、研究を加速、深化させるために国内外の関連する研究者との研究連絡等も積極的に行うことにした。

4. 研究成果

H が群 G の正規部分群であるとき、 G の内部自己同型は H への作用を与える。この群作用を一般化する方針で、高次ホモトピー正規性をファイバーワイズ A 無限大構造によって記述することに成功した。ファイバーワイズ A 無限大構造は酒井氏によりファイバーワイズ射影空間関連付けられており、したがって高次ホモトピー正規性の障害はファイバーワイズホモトピー論における古典的な障害理論によってとらえられる。ファイバーワイズホモトピー論では様々な計算手法が確立しており、計算を実行できる例は多いものと思われる。その中でも、古典型 Lie 群の包含写像がどのくらい高次ホモトピー正規性を持つかについて、計算に用いる実際に代数的な構造を明らかにし、計算を実行した。高次でないホモトピー正規性については数多くの先行研究があるが、高次のものは初めてのものである。つまり、通常の高次ホモトピー正規性ではとらえられない正規部分群とならないことの障害を具体的に記述することに成功した。この結果については Journal of Topology に掲載された。

一方でファイバーワイズ A 無限大構造の基礎理論の構築は達成できなかった。当初は位相的複雑さを中心とする理論を考えていたが、上記の研究の中で目指すべき方向性の再考を迫られたためである。この課題については今後も検討を続けることにする。

また、A 無限大構造の応用として巨視的な構造に関する無限次元 Lie のホモトピー論も共同研究を行った。幾何学的群論で現れる C^* 代数のユニタリ群については K 群との関係や Bott 周期性などが知られており、指数定理などの応用が行われているが、通常 Lie 群の特性類の理論

ができるほどには深い理解がなされていないものが多かったようである。本研究では整数の組のなす格子 Z^d 上の uniform Roe algebra のユニタリ群の構造を調べた。特に、 $d=1$ のときには非可算無限個の特性類を持つことを具体的に記述した。今後は Poincaré–Hopf の定理の非コンパクト版などへの応用を検討したい。

本研究課題の期間は新型コロナウイルスの感染拡大に多大な影響を受けた。オンラインでの研究連絡等は国内外の距離を縮めた一方、対面での研究発表、研究連絡は困難な状態となった。そのため、当初予定していたイギリス出張などは延期を余儀なくされ、研究期間を1年延長することになった。最終的には延長した期間で出張は可能になり、研究発表や関連する研究者との研究連絡は達成され、研究の深化につなげることができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

| | |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名 Iwase Norio, Sakai Michihiro, Tsutaya Mitsunobu | 4. 巻 264 |
| 2. 論文標題 A short proof for $tc(K)=4$ | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Topology and its Applications | 6. 最初と最後の頁 167 ~ 174 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2019.06.014 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Tsukamoto Masaki, Tsutaya Mitsunobu, Yoshinaga Masahiko | 4. 巻 251 |
| 2. 論文標題 G-index, topological dynamics and the marker property | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics | 6. 最初と最後の頁 737 ~ 764 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11856-022-2433-0 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Tsutaya Mitsunobu | 4. 巻 16 |
| 2. 論文標題 Higher homotopy normalities in topological groups | 5. 発行年 2023年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Topology | 6. 最初と最後の頁 234 ~ 263 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/topo.12282 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Kato Tsuyoshi, Kishimoto Daisuke, Tsutaya Mitsunobu | 4. 巻 25 |
| 2. 論文標題 Homotopy type of the space of finite propagation unitary operators on \mathbb{Z} | 5. 発行年 2023年 |
| 3. 雑誌名 Homology, Homotopy and Applications | 6. 最初と最後の頁 375 ~ 400 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/HHA.2023.v25.n1.a20 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名 Kato Tsuyoshi, Kishimoto Daisuke, Tsutaya Mitsunobu | 4. 巻 15 |
| 2. 論文標題 Homotopy type of the unitary group of the uniform Roe algebra on Z^n | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis | 6. 最初と最後の頁 495 ~ 512 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S1793525321500357 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 3件)

| |
|--|
| 1. 発表者名 薦谷充伸 |
| 2. 発表標題 Finite propagation operators and Hilbert bundles with end |
| 3. 学会等名 東京都立大学幾何学セミナー |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 薦谷充伸 |
| 2. 発表標題 Homotopy normalities in topological groups |
| 3. 学会等名 京都九州信州トポロジー合同セミナー |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 薦谷充伸 |
| 2. 発表標題 Finite propagation operators and Hilbert bundles with end |
| 3. 学会等名 京都大学微分トポロジーセミナー |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 蔦谷充伸 |
| 2. 発表標題 Unstable homotopy types of spaces of finite propagation unitary operators on Z |
| 3. 学会等名 関西ゲージ理論セミナー、京都代数トポロジーセミナー合同セミナー |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Mitsunobu Tsutaya |
| 2. 発表標題 Homotopy types of spaces of finite propagation unitary operators on Z |
| 3. 学会等名 WORKSHOP: unitary operators: spectral and topological properties (国際学会) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Mitsunobu Tsutaya |
| 2. 発表標題 Homotopy type of the space of finite propagation unitary operators on Z |
| 3. 学会等名 Southampton-Kyoto Workshop II (国際学会) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 蔦谷充伸 |
| 2. 発表標題 Homotopy theory of An -spaces in Lie groups |
| 3. 学会等名 京都大学数学教室談話会 (招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 髙谷充伸 |
| 2. 発表標題 Characterizations of homotopy fiber inclusion |
| 3. 学会等名 ホモトピー論シンポジウム |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Mitsunobu Tsutaya |
| 2. 発表標題 Higher homotopy normalities in topological groups |
| 3. 学会等名 Classifying spaces in homotopy theory: in honour of Ran Levi's 60th Birthday (国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

| |
|---|
| 個人webサイト https://www3.math.kyushu-u.ac.jp/~tsutaya/ |
|---|

| | | |
|---------------------------|-----------------------|----|
| 6. 研究組織 | | |
| 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|