

令和 6 年 6 月 11 日現在

機関番号：16102

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14537

研究課題名（和文）GKM理論におけるトポロジー，代数幾何，表現論

研究課題名（英文）Topology, algebraic geometry, and representation theory in GKM theory

研究代表者

山中 仁 (Yamanaka, Hitoshi)

鳴門教育大学・大学院学校教育研究科・准教授

研究者番号：90725011

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題は、種々の空間がもつ対称性を利用することで空間の性質を研究する変換群論と呼ばれる分野に属するものである。この分野にはトポロジー、代数幾何、表現論などの様々な分野が関係しており、それに応じて多様な考察を行うことが可能になる。

本研究は変換群論の中でもGKM理論と呼ばれるものに焦点をあてたものであり、主たる考察対象はトーラス同変コホモロジーという演算を加法や乗法といった構造をもった対象である。これは群の作用を持った空間から構成される対象であるが、空間に関する多くの性質を内包していることが知られている。本研究課題ではこのことを同変剛性の観点から精密化することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

変換群論はそれ自身1つの分野として確立されているが、可換代数、組み合わせ論、トポロジー、代数幾何、表現論といった諸分野とも自然かつ密接に関係している。

研究成果の概要（英文）：This research project belongs to a field called transformation group theory, which studies the properties of spaces by exploiting the symmetries of various spaces. The research field involves various fields, such as topology, algebraic geometry and representation theory, and accordingly, various considerations can be made.

Our study focuses on what is called GKM theory within transformation group theory, and the main object is torus equivariant cohomology, which is an object with a structure of operations such as addition and multiplication. The object  $c$  is constructed from a space with a group action and it is known to contain many properties related to the space. In this research project, this has been successfully refined from the point of view of the equivariant rigidity.

研究分野：変換群論

キーワード：GKM理論 トーラス同変コホモロジー GKMグラフ トーラスグラフ 同変Chern類

## 1. 研究開始当初の背景

Goresky-Kottwitz-MacPherson (1998) 並びに Guillemin-Zara (1998) による Goresky-Kottwitz-MacPherson の結果の位相的な記述によって、トーラス群作用が GKM 条件と同変形式性とよばれるマイルドな条件をみたすときには、トーラス同変コホモロジー代数が同変 1-スケルトンから定まる GKM グラフと呼ばれる対象によって組み合わせ論的に定義されるグラフ同変コホモロジー代数と同型であることが知られている (GKM 理論)。これは 1980 年代の Atiyah-Bott, Berline-Vergne, Duistermaat-Heckman による局所化公式をコホモロジー代数全体のレベルで確立したものと考えられる。

上述の条件をみたす多様体は GKM 多様体と呼ばれ、トーリック多様体、旗多様体、正則半単純 Hessenberg 多様体といった多種多様な代数多様体を含んでいる。また、トーラス同変コホモロジー代数が組み合わせ論的に記述されていること、並びにトーリック多様体の場合には Stanley-Reisner 環と一致することから、可換代数の観点からも興味深い対象である。

以上の背景のうち、特に GKM 多様体がトーリック多様体を内包していることに着目する。このとき、トーリック多様体で知られている定理を GKM 理論の枠組みに一般化することは問題意識としては自然である。しかしながら、GKM 多様体はかなり広範なクラスであることから、実際問題としてどの定理が一般化可能なのかわ不明瞭であった。

## 2. 研究の目的

GKM グラフが定めるグラフ同変コホモロジー代数について、トーリック幾何で得られていた結果がどこまで一般化可能であるのかを調査することが本研究課題の研究目的であった。

## 3. 研究の方法

Masuda (2008) による同変剛性に着目する。これはトーリック多様体がトーラス同変コホモロジーの完全不変量であることを示したものであり、トーリック多様体を定める非特異完備扇の双対がトーリック多様体の GKM グラフと等価な対象であることから、GKM 理論の枠組みに一般化することを試みた。

## 4. 研究成果

一般の GKM グラフに対する同変剛性定理を証明した (Matthias Franz との共同研究。論文 [1])。GKM グラフの場合には Masuda (2008) が用いた議論を適用することは難しいが、我々は GKM グラフの頂点が定める同変 Thom 類に着目することで、この難点が克服されることを明らかにした。

また、論文 [1] で得られた同変剛性には符号不定性があり、論文 [1] を執筆した時点ではそれが如何にして解消されるかという点が不明瞭であった。この問題に対して、同変全 Chern 類に着目した解答を与えた (論文 [2])。これにより、GKM グラフがトーラス同変コホモロジーと同変全 Chern 類の組と等価な対象であることを明らかにした。また、この結果についてオンライン講演を行った (口頭発表 [3])。

Schubert 多様体の一般トーラス軌道閉包に関する研究も行い、得られた結果を証明の概要と共に口頭発表の形で公表した (口頭発表 [1], [2])

また、数学教育に類することではあるが、円周角の定理に関する諸定理が対称性の観点から簡潔に証明されることを見出し、査読付き論文として発表した (論文 [3])。

論文

[1] Matthias Franz, Hitoshi Yamanaka, Graph equivariant cohomological rigidity for GKM graphs, Proceedings of the Japan academy, Series A, Mathematical Sciences, 95 (10), 107-110, 2019.

[2] Hitoshi Yamanaka, On the sign ambiguity in equivariant cohomological rigidity of GKM graphs, Proceedings of the Japan academy, Series A, Mathematical Sciences, 97 (9), 76-81, 2021.

[3] 山中 仁, 円周角をめぐる諸定理への接線と対称性による統一的アプローチ, 数学教育学会誌, 63 (1・2) 45-54, 2022.

口頭発表

[1] Stratifications on generic torus orbit closures, 第 46 回変換群論シンポジウム, 2019 年 10 月 31 日

[2] Stratifications on generic torus orbit closures, Toric Topology 2019 in Okayama, 2019 年 11 月 20 日

[3] On the sign ambiguity in equivariant cohomological rigidity of GKM graphs, Toric Topology 2021 in Osaka, 2021 年 3 月 26 日

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 山中仁	4. 巻 63
2. 論文標題 円周角をめぐる諸定理への接線と対称性による統一のアプローチ	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 数学教育学会誌	6. 最初と最後の頁 45, 54
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hitoshi Yamanaka	4. 巻 97(9)
2. 論文標題 On the sign ambiguity in equivariant cohomological rigidity of GKM graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A	6. 最初と最後の頁 76,81
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3792/pjaa.97.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Franz Matthias, Yamanaka Hitoshi	4. 巻 95
2. 論文標題 Graph equivariant cohomological rigidity for GKM graphs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 107 ~ 110
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3792/pjaa.95.107	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 3件/うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Hitoshi Yamanaka
2. 発表標題 On the sign ambiguity in the equivariant cohomological rigidity for GKM graphs
3. 学会等名 Toric Topology 2021 in Osaka（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hitoshi Yamanaka
2. 発表標題 Stratifications on generic torus orbit closures
3. 学会等名 第46回変換群論シンポジウム(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hitoshi Yamanaka
2. 発表標題 Stratifications on generic torus orbit closures
3. 学会等名 Toric Topology 2019 in Okayama(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関