

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 13 日現在

機関番号：34315

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14540

研究課題名（和文）力学系に現れる幾何構造の特異性の視点による研究

研究課題名（英文）Singularity of geometric structures appearing in dynamical systems

研究代表者

多羅間 大輔 (Tarama, Daisuke)

立命館大学・理工学部・准教授

研究者番号：30722780

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,700,000 円

研究成果の概要（和文）：微分方程式で定式化される力学系には、微分幾何学、微分位相幾何学、代数的・複素解析的幾何学における様々な幾何構造が現れる。本研究では、とくに対称性の高い力学系である可積分系をはじめとするHamilton力学系に現れる種々の幾何構造について特異性の観点から分析し、力学系のふるまいとの関係を考察した。その結果、Lie群上の可積分測地流の平衡点の安定性、7次元球面上のsub-Riemann測地流の可積分性、剛体の回転を表す可積分系の代数幾何学的構造、統計的変換モデルに付随するLie群上の測地流の記述等に関して興味深い研究結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

半単純Lie群上の可積分測地流の平衡点の安定性解析に関する結果は、測地流のふるまいの幾何学的理解の深化に大きく貢献したと考えている。また、統計的変換モデルに現れる測地流の記述は情報幾何学と力学系理論の関係に関する結果として、既存の研究に一石を投じる内容であったと考えている。社会的には、Lie群上の測地流に関する理解の深化は数値計算アルゴリズムと関わる可能性があるため、重要な意義があると考えられる。また、データサイエンスの重要性が広く認知される中で、力学系理論や幾何学の果たす役割の重要性が再度認識されるためのきっかけを与える役割を果たしているものとする。

研究成果の概要（英文）：In the study of dynamical systems modeled by differential equations, there appear geometric structures from the viewpoints of differential geometry, differential topology, and algebraic/complex analytic geometry. The project dealt with the geometric structures arising from Hamiltonian systems, including the integrable systems, with the focus on singularities. Consequently, interesting results are obtained on the stability of equilibria of integrable geodesic flows of Lie groups, integrability of sub-Riemannian geodesic flows on the seven-dimensional sphere, algebro-geometric structures in integrable systems describing the rotational motions of a rigid body, and the description of geodesic flows on Lie groups associated to the statistical transformation models.

研究分野：力学系・可積分系の理論と幾何学

キーワード：Hamilton力学系 測地流 可積分性 Lie群 平衡点 代数的・複素解析的幾何学 sub-Riemann幾何学 情報幾何学

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

可積分系に代表される Hamilton 力学系には、微分幾何学、微分位相幾何学、代数的・複素解析学それぞれにおける幾何構造が現れる。実際、Hamilton 力学系の定義される枠組みとして、シンプレクティック構造や Poisson 構造のような微分幾何学的構造が現れる。また、可積分系に付随する Lagrange ファイブレーションには微分位相幾何学的構造が見られ、さらにその可積分系が Lax 方程式で記述される場合はスペクトル曲線のような代数的・複素解析的構造が得られる。

可積分系や Hamilton 力学系の研究においては、その対称性が大きな役割を果たす。実際、Hamilton 力学系の対称性による簡約理論は広範囲の応用をもつ。また、可積分系は最も対称性の高い Hamilton 力学系と考えることもできる。

力学系理論の観点からは、平衡点(特異点)の周りでの挙動の分析が力学系や摂動系のふるまいを理解するためには重要である。

また、微分幾何学的な幾何構造における特異性をもつ対象として、sub-Riemann 構造がある。Sub-Riemann 多様体とは Hörmander 条件とよばれる非ホロノミックな接分布上に計量が与えられた多様体を意味するが、Riemann 構造の退化と考えることもできる。Sub-Riemann 多様体上では Riemann 多様体と同じように測地線を考えることができるが、とりわけ Hamilton 力学系の枠組みで記述できる正規測地線については、測地流として分析が可能である。

このように、力学系理論の研究においては、種々の幾何構造に見られる対称性や特異性が大きな役割を果たしている。

2. 研究の目的

1. にのべた可積分系をはじめとする Hamilton 力学系の理論研究に現れる微分幾何学、微分位相幾何学、代数的・複素解析的幾何学におけるさまざまな幾何構造に関して、特異性や対称性の視点から研究を展開することや他分野への応用の可能性についても追求することが、本研究の目的となっている。このことは、幾何構造の研究に新たな知見をもたらすことも期待されている。また、同じ考え方に基づいて、摂動系や量子力学系における解析学的問題を解決することも目的のひとつである。

具体的な課題として、Lie 群や等質空間上の Riemann 計量や sub-Riemann 計量に関する測地流の可積分性に関する研究や平衡点の安定性解析、剛体の回転運動にかかわる可積分系に付随する Lagrange ファイブレーション等の代数的・複素解析的幾何学における幾何構造の考察を行う。また、可積分系の摂動系についても対称性と特異性の視点から考察を加え、力学系のふるまいを解明する。

さらに、本研究プロジェクトの研究遂行を進めているなかで、統計的変換モデルとよばれる Lie 群の作用を許容する統計モデルに付随する情報幾何学由来の測地流について本研究の立場から研究する必要性が出てきた。統計的変換モデルについて考察をおこない、力学系理論と情報幾何学の関係について対称性や特異性の観点から新たな知見を得ることも研究遂行の上で大きな目的となった。

3. 研究の方法

2. の研究の目的を達するため、以下のテーマに沿って研究をおこなった：

- (1) 半単純 Lie 群上の Mishchenko・Fomenko により導入された左不変な可積分測地流について、対応する Lie 環上の Euler 方程式の平衡点の安定性解析を行う。
- (2) 理想流体中のコマの運動を記述する Clebsch のコマに付随して現れる Kummer 曲面の複素解析的幾何学性質の分析をおこなう。
- (3) 自由剛体の回転運動を記述する 3 次元 Euclid 空間上の Euler 方程式の摂動系について、ヘテロクリニック軌道内の極限軌道の個数評価を行う。
- (4) 7 次元球面上の sub-Riemann 測地流について、可積分性を証明する。
- (5) 統計的変換モデルに付随する 測地流の方程式の記述と幾何構造との関係の解明。
これらのテーマに取り組むにあたって、主に使用したのは以下の手法である：
 - Lie 群論・Lie 環論：本研究では対称性を重視しているため、対象とする力学系は Lie 群に関する対称性をもつ。そこで、Lie 群の微分幾何学的性質や Lie 環の代数的構造を使用して特に(1)・(4)・(5)の研究は遂行されている。
 - 代数的・複素解析的幾何学：(2)の Clebsch のコマの可積分系については、Kummer 曲面が現れ、代数的・複素解析的幾何学の手法を用いてその特異点を取り扱う。
 - 可積分系の摂動に関する力学系理論：(3)の Euler 方程式の摂動系については、可積分系の摂動に関する Melnikov 関数を用いた解析が重要な手法である。また、その土台になる問題の定式化にはシンプレクティック構造の知見が活かされている。
 - 情報幾何学：統計的変換モデルについては情報幾何学の立場から Fisher-Rao 計量や Amari-Chentsov テンソルといったテンソルの他そこから誘導される 接続とよばれるアフライン

接続が重要な役割を果たす。(5)では、このような情報幾何学的(微分幾何学的)対象と測地流の Hamilton 力学系や Lagrange 力学系等による微分幾何学的定式化が有効に使用できる。

4. 研究成果

3. に述べた研究方法に沿って研究を遂行し、得られた結果について述べる。

(1) 半単純 Lie 群上の左不変な可積分測地流についての平衡点の安定性解析

半単純 Lie 群上の左不変計量に関する測地流について、測地流が Liouville の意味で可積分となるような計量の族が Mishchenko・Fomenko によって 1978 年頃に導入されている。この力学系は物理学における自由剛体の回転運動を記述する可積分な Hamilton 力学系の一般化でもある。この力学系に関して、平衡点の安定性を決定する問題が 2010 年頃から考えられていた。この問題に関して、一般の(余)随伴軌道における孤立平衡点の安定性(あるいは Williamson 型)を解析し、計量を定める Cartan 部分環に対応するルート系の実性・純虚性・複素性による記述を行っていた。この研究結果を用いて単純 Lie 群の場合の平衡点の Williamson 型の分類を、Kostant による実単純 Lie 環内の Cartan 部分環の共役類の分類結果を用いて、スイス・中国の共同研究者との共同研究において行った。これらの結果に関する論文が学術誌より出版されている。この結果は、これ以前に得られていた上記の可積分測地流に関する平衡点の安定性解析の結果を総括する結果であったと考えている。

このテーマに関連する測地流の安定性解析については、残された問題として実単純 Lie 群 $SU(p, q)$ と $SL(p+q, C)$ の正規実形 $SL(p+q, R)$ の交叉 $SO(p, q)$ 上の可積分測地流や Bloch-Iserles 系とよばれる対称行列の空間上の可積分系に関する平衡点の安定性解析について研究を継続している。

(2) Clebsch のコマの複素解析的幾何学

理想流体中の剛体の運動を記述する Clebsch のコマとよばれる可積分な Hamilton 力学系には Abel 曲面や Kummer 曲面という特殊な K3 曲面が現れることが古典的に知られている。この可積分系に付随して現れる Kummer 曲面は複素射影空間の 16 個の単純特異点をもつ 4 次曲面であり、その代数的・複素解析的な幾何構造として特異点の明示的記述や作用変数の積分表示の決定等をフランスの共同研究者とともに行った。これらの結果については、研究集会プロシーディングスに論文が掲載されている。

(3) 自由剛体の Euler 方程式の摂動系

3次元自由剛体の力学系は本質的に 3次元 Euclid 空間上の Euler 方程式とよばれる常微分方程式系によって記述されることが知られている。この力学系は可積分系であるが、その摂動系については一般には非可積分である。この研究では、2次元シンプレクティック多様体上の Hamilton 力学系の摂動系に関する Melnikov 函数の理論を整備し、Euler 方程式のあるクラスの摂動系についてヘテロクリニック軌道内の極限軌道の個数評価に関する結果を得た。この研究はフランスの共同研究者との共同研究であり、現在も結果の分析を進めているところである。研究結果がまとまり次第、学術誌への論文の投稿を行う予定である。

(4) 7次元球面上の sub-Riemann 測地流の可積分性

等質空間・Lie 群上の sub-Riemann 構造に関する測地流について、本研究における研究成果として、7次元球面上の自明化可能な sub-Riemann についての測地流の可積分性を証明することにドイツの共同研究者との共同研究によって成功した。この結果は球面の Riemann 計量に関する測地流の可積分性とは異なり、非自明な積分の構成方法が必要であった。また、可積分性と関連して、sub-Riemann 等長変換群の無限小変換を球面に作用する 8次元回転群の Lie 環の範囲で決定することにも成功した。これらの結果については論文を学術誌へ投稿中である。また、関連する事柄として 7次元球面上の階数 5 の sub-Riemann 構造に関する sub-Laplace 作用素の熱核の決定に関する共著論文も学術誌に掲載されている。

(5) 統計的変換モデルに付随する測地流の記述

統計的推定等に現れるパラメータ付けられた確率密度函数族から得られる Fisher-Rao 計量や Amari-Chentsov テンソルを用いて得られるアフライン接続の微分幾何学を研究する情報幾何学の枠組みに、統計的変換モデルとよばれる Lie 群の作用を許容する標本多様体上の確率密度函数族に関する統計的モデルが Barndorff-Nielsen 等によって 1980 年代に提唱されている。この統計的変換モデルについて、Fisher-Rao 計量や Amari-Chentsov テンソルを考え、付随する接続に関する測地流の記述を行った。具体的には、多変量正規分布に関する統計的変換モデルやコンパクト Lie 群をパラメータ空間とする統計的変換モデルに関して分析をおこない、測地流の記述を幾何学的力学系理論によって行った。興味深い発見としてこれらの測地流は考察している Lie 群上の sub-Riemann 構造に関する測地流となる場合があることが分かっている。これらの結果の一部は国際会議プロシーディングスに論文として掲載されている。このテーマに関しては研究成果がまとまり次第、論文を学術誌へ投稿する予定である。

以上のように、本研究では様々な背景から導入される Lie 群や等質空間上の力学系について、その幾何学的構造を対称性や特異性の観点から研究を遂行した。その結果、(1)や(2)のように力学系理論における安定性や作用積分といった対象のルート系や複素曲面等の幾何学的構造によって説明できることが判明した。(3)のように摂動系に関する分析をおこなうことにも幾何学や特異性の考え方が応用されている。(4)の研究では、Riemann 構造の退化である sub-Riemann 構造の下でも測地流の可積分性が証明できることが 7 次元球面の場合にやはり対称性の観点から示された。さらには、(5)のように統計モデルに由来する力学系の幾何構造についても、Hamilton 力学系や Lagrange 力学系の理論によって対称性の観点から研究を展開し、sub-Riemann 幾何学との関係も見いだされた。本研究ではこのような様々な興味深い結果を得たが、これらの結果は今後同じように力学系と幾何構造の対称性と特異性の観点からの研究を展開することで敷衍・発展させられると考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 8件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Bauer Wolfram, Laaroussi Abdellah, Tarama Daisuke	4. 巻 -
2. 論文標題 Rank 5 Trivializable Subriemannian Structure on S^7 and Subelliptic Heat Kernel	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Potential Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11118-023-10110-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Tarama Daisuke, Francoise Jean-Pierre	4. 巻 14072
2. 論文標題 Geodesic Flows of α -connections for Statistical Transformation Models on a Compact Lie Group	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 454 ~ 462
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-031-38299-4_47	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Tarama Daisuke, Francoise Jean-Pierre	4. 巻 5(1)
2. 論文標題 Dynamical Systems over Lie Groups Associated with Statistical Transformation Models	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Physical Sciences Forum	6. 最初と最後の頁 21
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/psf2022005021	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Daisuke Tarama, Jean-Pierre Francoise	4. 巻 12829
2. 論文標題 Information Geometry and Hamiltonian Systems on Lie Groups	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 273 ~ 280
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-80209-7_31	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ratiu Tudor S., Tarama Daisuke	4. 巻 7
2. 論文標題 Geodesic flows on real forms of complex semi-simple Lie groups of rigid body type	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Research in the Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40687-020-00227-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 J.-P. Francoise, D. Tarama	4. 巻 2
2. 論文標題 The Rigid Body Dynamics in an Ideal Fluid: Clebsch Top and Kummer Surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Integrable Systems and Algebraic Geometry	6. 最初と最後の頁 288 ~ 312
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/9781108773355.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 W. Bauer, D, Tarama	4. 巻 2137
2. 論文標題 Subriemannian geodesic flow on S^7	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 42 ~ 59
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 J.-P. Francoise, A. Jacquemard, D. Tarama	4. 巻 2137
2. 論文標題 Kummer's quartic surface associated to the Clebsch top	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 68 ~ 80
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計27件(うち招待講演 17件/うち国際学会 20件)

1. 発表者名 多羅間 大輔
2. 発表標題 Integrability of the subriemannian geodesic flows over the seven-dimensional sphere
3. 学会等名 名古屋数理情報科学研究会2023(第1回)(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Daisuke Tarama
2. 発表標題 Geometry around the free rigid body dynamics
3. 学会等名 Seminaire de Systemes Dynamiques, Institut de Mathematiques de Toulouse(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Daisuke Tarama
2. 発表標題 Complete integrability of the subriemannian geodesic flows over the seven-dimensional sphere
3. 学会等名 Finite dimensional integrability in mathematical physics(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Daisuke Tarama, Jean-Pierre Francoise
2. 発表標題 Geodesic flows of \ast -connections for statistical transformation models on a compact Lie group
3. 学会等名 Geometric Science of Information 2023(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Daisuke Tarama
2. 発表標題 Complex geometry around rigid body dynamics
3. 学会等名 Problems on foliations and dynamics in complex geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Daisuke Tarama
2. 発表標題 Geodesic flows on Lie groups associated to statistical transformation models
3. 学会等名 Microlocal and Global Analysis, Interactions with Geometry (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Jean-Pierre Francoise, Daisuke Tarama
2. 発表標題 Dynamical systems over Lie groups associated to statistical transformation models
3. 学会等名 International Conference on Bayesian and Maximum Entropy methods in Science and Engineering (41st MaxEnt2022 Conference) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Daisuke Tarama
2. 発表標題 Geodesic flows of the Fisher-Rao metrics for the statistical transformation models
3. 学会等名 Oberseminar Analysis und Theoretische Physik, Leibniz Universitaet Hannover (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Daisuke Tarama
2. 発表標題 Geometric aspects of the free rigid body dynamics
3. 学会等名 Floris Takens Seminar, Universiteit Groningen (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Daisuke Tarama
2. 発表標題 Left-invariant geodesic flows over semi-simple Lie groups
3. 学会等名 GFM(Grupo de Fisica Matematica) seminar, Universidade de Lisboa (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Daisuke Tarama
2. 発表標題 Left-invariant geodesic flows on semi-simple Lie groups
3. 学会等名 第15回力学系数理コロキウム (京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻矢ヶ崎研究室) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 多羅間大輔
2. 発表標題 情報幾何とシンプレクティック幾何学・接触幾何学 2
3. 学会等名 トポロジープロジェクト研究集会「接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Daisuke Tarama
2. 発表標題 Subriemannian geodesic flows of the 7-dimensional sphere
3. 学会等名 Microlocal and Global Analysis, Interactions with Geometry, Universitaet Potsdam (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 多羅間大輔
2. 発表標題 半単純 Lie 群上の可積分測地流について
3. 学会等名 日本数学会年会, 中央大学理工学部 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Jean-Pierre Francoise, Daisuke Tarama
2. 発表標題 Information Geometry and Hamiltonian Systems on Lie Groups
3. 学会等名 Geometric Science of Information GSI 2021 (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 多羅間大輔
2. 発表標題 情報幾何学とLie群上の力学系 1・2
3. 学会等名 ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺 (13) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 多羅間大輔
2. 発表標題 剛体の力学系と複素代数幾何学
3. 学会等名 トポロジープロジェクト研究集会「接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Daisuke Tarama
2. 発表標題 Information geometry and dynamical systems over Lie groups
3. 学会等名 Microlocal and Global Analysis, Interactions with Geometry (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Daisuke Tarama
2. 発表標題 Sub-Riemannian geodesic flows on the spheres
3. 学会等名 Himeji Conference on Partial Differential Equations 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Daisuke Tarama
2. 発表標題 Integrable geodesic flow of a real semi-simple Lie group of rigid body type
3. 学会等名 Microlocal and Global Analysis, Interactions with Geometry (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 D. Tarama
2. 発表標題 Free rigid body dynamics on $SU(p,q)$ and $SO(p,q)$
3. 学会等名 FDIS 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 D. Tarama
2. 発表標題 Clebsch top and Kummer surface
3. 学会等名 Vietnam-USA Joint Mathematical Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 D. Tarama
2. 発表標題 Mishchenko-Fomenko geodesic flow on a real semi-simple Lie group
3. 学会等名 Seminaire "Systemes Dynamiques, Geometrie Differentielle et Applications" (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 多羅間 大輔
2. 発表標題 実半単純Lie群上のMishchenko-Fomenko測地流について
3. 学会等名 第7回「ハミルトン系とその周辺」研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 多羅間 大輔
2. 発表標題 Clebschのコマの力学系とKummer曲面
3. 学会等名 「非可換代数幾何学の大域的問題とその周辺」高知小研究集会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 D. Tarama
2. 発表標題 Geometry and analysis for the Kirchhoff equations under the Clebsch-Weber condtions
3. 学会等名 Microlocal and Global Analysis, Interactions with Geometry (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 D. Tarama
2. 発表標題 Geometry and analysis for the Kirchhoff equations under the Clebsch condition
3. 学会等名 Analysis & Geometry Seminar , Universiteit Antwerpen (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計6件

国際研究集会 Workshop: Global Analysis and Geometry 2023 at Osaka	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 Poisson geometry and related topics 23	開催年 2023年～2023年

国際研究集会 Mini-workshop : Global analysis and Geometry	開催年 2023年 ~ 2023年
国際研究集会 Geometric Structures and Differential Equations Symmetry, Singularity, and Quantization (幾何構造と微分方程式 対称性・特異点及び量子化の視点から)	開催年 2022年 ~ 2022年
国際研究集会 Geometry, Mechanics, and their Applications (幾何学と力学とその応用)	開催年 2019年 ~ 2019年
国際研究集会 Poisson Geometry and Related Topics (Poisson幾何とその周辺)	開催年 2019年 ~ 2019年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	Shanghai Jiao Tong University			
フランス	Sorbonne Universite	Institut de Mathematiques de Bourgogne		
ドイツ	Leibniz Universitaet Hannover			
スイス	Ecole Polytechnique Federale de Lausanne			