

令和 5 年 6 月 26 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14544

研究課題名(和文) 指数理論の幾何学・物理学への応用

研究課題名(英文) Applications of index theory to geometry and physics

研究代表者

窪田 陽介 (Kubota, Yosuke)

信州大学・学術研究院理学系・講師

研究者番号：30804075

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の主要な成果は、高階指数理論における作用素の振る舞いに関する一つの観察と、それを適用して得られるいくつかの結果である。骨子となる観察は、ある種の形状をした距離空間上の有限伝播作用素が、その被覆空間に自然に持ち上がるという基本的な事実である。私は、高階指数理論においてかねてより立てられていたいくつかの問い、より具体的には(1)余次元2部分多様体の指数理論(2)K0-バンド幅の無限性によるPSC計量の障害(3)螺旋格子欠陥を持つ3次元トポロジカル物質におけるバルク・欠陥対応の数学的証明、の3点に対して、この観察が解答を与えることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

高階指数理論は、作用素のなす空間のトポロジーを扱う抽象理論で、これまでに高度に非自明な理論的枠組を構築することに成功している。一方それに比べると、その抽象論がどのような問題に適用されうるかについての知見はまだ不足している。本研究では、分野が培ってきた理論がどのようなことを証明する能力を持っているかについて、具体的な事例の研究をもって理解を押し進めることができた。このような方向性の研究は、分野の知見を数学全体の中に根付かせるために大切である。

研究成果の概要(英文)：The main result of this research is an observation about the behavior of operators in higher index theory and some consequences obtained by applying it. The basic observation is a that operators with finite propagation on a metric space of a certain shape naturally lift to their covering space. It answers to several questions that has been asked in higher index theory, more specifically (1) index theory of codimensional 2 submanifolds, (2) obstructions to PSC metrics due to the infinite K0-bandwidth, and (3) a mathematical proof of the bulk-dislocation correspondence in 3-dimensional topological matter with a screw dislocation.

研究分野：非可換幾何学

キーワード：非可換幾何学 高階指数理論 トポロジカル相 作用素環論

### 1. 研究開始当初の背景

高階指数理論は、作用素や作用素のなす空間のトポロジーを扱うための抽象理論である。特に(高階)指数は、作用素のトポロジー的な性質と方程式が解を持つかどうかとの間に関わりを与えており、様々な応用が存在する。例えば、楕円形偏微分作用素の指数定理は、有理 Pontrjagin 類や正スカラー曲率 (PSC) 計量の微分トポロジーに強力な応用があることが長年の研究で知られている。また近年の物性物理におけるトポロジカル相の理論では、ハミルトニアンが持つ位相的な情報が空間の大域的な形状に由来することがわかってきている。一方で、より各論的な問題については手の届いていないことも多く、こういった周辺領域を整備することは理論がより大きな広がりを持つためには重要である。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、高階指数理論の物理や幾何におけるより具体的な設定での理解を進めることで、その理論の有効性をより説得的にすることにある。具体的に着目している問題のひとつに、Schick のメタ予想 (Schick, ICM 2014) がある。

Dirac 作用素の高階指数 (Rosenberg 指数) の非消滅は、与えられた閉スピン多様体が PSC 計量を持つための強力な障害を与えることが知られているが、逆に閉スピン多様体が PSC 計量を持つための障害のうち何らかの意味で Dirac 作用素に由来するものの中では、この障害が最も強いものであるというものが、Schick のメタ予想の主張である。実際に、ある PSC 計量の存在の障害が実はより強く高階指数の非消滅を導くような例がいくつか知られている。

### 3. 研究の方法

Dirac 作用素に由来する PSC 計量の障害の例の一つに、余次元 2 部分多様体の指数による障害 (Hanke-Pape-Schick, Ann. Inst. Fourier 2015) がある。ここでは、興味のある多様体  $M$  がある種の弱い仮定を満たす余次元 2 部分多様体  $N$  を持つとき、 $N$  の Dirac 作用素の高階指数が  $M$  が PSC 計量を持つための障害になることが示されている。

この例では、二つの不変量が異なる群に値を取るところに困難があり、何らかの準同型によってこれらの群を結びつける必要がある。一つの方法として、高階指数理論のバンドルの描像を用いることで、群の取り替えを平坦バンドルの係数環の取り替え (base change) として理解するという方針が考えられる。私は既にその方針で証明を与えていたが、この証明には相対高階指数という過剰な道具を持ち出して迂遠である、2 次不変量に一般化できない、などの不満な点があった。これらを改善するために、より粗幾何学な視点を導入することが重要である。

### 4. 研究成果

余次元 2 部分多様体に対する Schick のメタ予想は、Schick との共著論文で十分に明快な形でまとめられた。ここでは、Calkin 環と呼ばれる無限次元作用素環の平坦バンドルを用いた。これは二つの自明束を Fredholm 作用素によって貼り合わせることで得られる (Fredholm 作用素は Calkin 環の中で可逆である)。このバンドルへの係数の取り換えと Mayer-Vietoris 境界準同型の組み合わせによって、欲しい群準同型 (余次元 2 転送写像) を構成することができた。

その後、この準同型の構成に別の視点からの再証明を与えた。新たな証明では、粗幾何学的なアイデアを用いることで、余次元 2 転送写像を高階  $-$ 不変量のような 2 次不変量に対してまで一般化することに成功した。また、基本群が双曲群のときに、群コサイクルとのペアリングによって定義される数値的な不変量たちに対しても、同様の関連付けが成り立つことを証明できた。特に数値的な 2 次不変量である高階  $-$ 数は、一般に値を決定することが困難であり、この結果によって非自明な例が構成できる。

ここで用いた粗幾何学的なアイデアとは、ある種の形状をした多様体 (例えば平面から円盤を除いた集合) に対して、その上の有限伝播作用素を被覆空間に自然に持ち上げることができるというものであった。この観察は、その後の研究の中でもう少し汎用性があることが明らかとなり、他のいくつかの問題を解くことにも成功した。

第一に、バンド幅と呼ばれる近年注目されている PSC 計量の障害がある。これは、ある種のバンド (2 つの境界を持つコンパクト多様体) を興味のある多様体にはめ込んだとき、その幅、すなわち二つの境界の間の距離として取りうる値の最大値が、 $M$  のスカラー曲率を用いて評価できるというものであり、その一種である  $K0$ -バンド幅 (Zeidler, J. Diff. Geom. 2020) に対して、

Schick のメタ予想が成り立つことを示した。これは Zeidler の提唱した予想に対する肯定的な解答を与えている。

第二に、物性物理においては 2010 年頃から事実として知られていた、3 次元物質のバルク・螺旋欠陥対応に対して、数学的な証明を与えた。ここでは螺旋欠陥を持つ 3 次元物質の上のハミルトニアンを螺旋曲面の幾何に帰着した。ここで扱った螺旋曲面に関する観察は、のちにヘリコイド上の Landau 作用素 ( 磁場付き Schroedinger 作用素 ) のスペクトルを、非可換幾何を用いて決定する研究 ( M. Ludewig, G. C. Thiang との共同 ) に発展した。

また、これらとは別の研究成果として、高エネルギー物理における高階指数理論の応用も提案した。格子ゲージ理論では、時空は離散的な点集合によって近似され、Dirac 作用素は Wilson-Dirac 作用素と呼ばれる行列によって近似される。Dirac 作用素の指数は系の量子異常を記述する物理的にも重要な量であるが、指数というのは真に無限次元的な概念であるにも関わらず、Wilson-Dirac 作用素という行列はその指数を負の固有値の数として記憶している。この指数定理は、長年物理においては定理とされてきたが、近年に数学者と物理学者のグループ ( 深谷-古田-松尾-大野木-山口-山下 ) によって数学的な証明が与えられた。私の研究では、この定理が実は概平坦ベクトル束の指数定理 ( これは Schick のメタ予想の別の例である ) をパラフレーズしたものであるということを示し、上記グループとは別証明を与えた。

また、新型コロナウイルス感染症の影響を受けて延長したあとの最終年度である 2022 年度には、本研究内容のうち特に物性物理に関するものを含む内容を紹介する書籍の執筆を行った。これは本研究計画終了の直後である 2023 年 4 月にサイエンス社から出版された。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 8件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kubota Yosuke	4. 巻 23
2. 論文標題 The Index Theorem of Lattice Wilson-Dirac Operators via Higher Index Theory	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 1297 ~ 1319
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00023-022-01159-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Gomi Kiyonori, Kubota Yosuke, Thiang Guo Chuan	4. 巻 32
2. 論文標題 Twisted crystallographic T-duality via the Baum-Connes isomorphism	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 2150078 ~ 2150078
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/s0129167x21500786	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kubota Yosuke	4. 巻 -
2. 論文標題 The relative Mishchenko-Fomenko higher index and almost flat bundles II: Almost flat index pairing	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Noncommutative Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/JNCG/432	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kubota Yosuke	4. 巻 54
2. 論文標題 The bulk-dislocation correspondence for weak topological insulators on screw-dislocated lattices	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 364001 ~ 364001
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/ac190c	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kubota Yosuke, Schick Thomas	4. 巻 25
2. 論文標題 The Gromov-Lawson codimension 2 obstruction to positive scalar curvature and the $C^*$ -index	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometry & Topology	6. 最初と最後の頁 949 ~ 960
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/gt.2021.25.949	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kubota Yosuke, Takeishi Takuya	4. 巻 366
2. 論文標題 Reconstructing the Bost-Connes semigroup actions from K-theory	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 107070 ~ 107070
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2020.107070	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kubota Yosuke	4. 巻 -
2. 論文標題 Almost flat relative vector bundles and the almost monodromy correspondence	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 1 ~ 30
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S1793525320500545	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kubota Yosuke	4. 巻 14
2. 論文標題 The relative Mishchenko-Fomenko higher index and almost flat bundles. I. The relative Mishchenko-Fomenko index	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Noncommutative Geometry	6. 最初と最後の頁 1209 ~ 1244
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/JNCG/391	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kubota Yosuke, Ludewig Matthias, Thiang Guo Chuan	4. 巻 395
2. 論文標題 Delocalized Spectra of Landau Operators on Helical Surfaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1211 ~ 1242
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-022-04452-4	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kubota Yosuke	4. 巻 2023
2. 論文標題 Band Width and the Rosenberg Index	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 9844 ~ 9860
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnac124	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kubota Yosuke	4. 巻 -
2. 論文標題 Codimension 2 transfer of higher index invariants	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-023-02598-7	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Yosuke Kubota
2. 発表標題 The bulk-dislocation correspondence: an operator-algebraic approach
3. 学会等名 Topological phases of matter
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yosuke Kubota
2. 発表標題 The bulk-dislocation correspondence: an operator-algebraic approach
3. 学会等名 The 21st International Conference on Discrete Geometric Analysis for Materials Design
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 窪田陽介
2. 発表標題 Higher index theory in geometry and physics
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会特別講演（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yosuke Kubota
2. 発表標題 Almost flat vector bundles on manifolds with boundary
3. 学会等名 RIMS workshop "Recent Developments in Operator Algebras"
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yosuke Kubota
2. 発表標題 Codimension 2 index obstruction to positive scalar curvature metrics
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yosuke Kubota
2. 発表標題 Operator algebra K-theory and topological phases
3. 学会等名 Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yosuke Kubota
2. 発表標題 Crystallographic T-duality as the Baum-Connes isomorphism
3. 学会等名 Materials Research Meetings 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yosuke Kubota
2. 発表標題 Operator algebra K-theory and topological phases
3. 学会等名 CREST チュートリアル・ワークショップ 「物質のトポロジカル相の理論的探究」
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yosuke Kubota
2. 発表標題 Relative K-homology group of C algebras and almost flat vector bundle on manifolds with boundary
3. 学会等名 東京大学作用素環セミナー
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 Yosuke Kubota
2. 発表標題 A codimension 2 index obstruction to positive scalar curvature and the Calkin algebra
3. 学会等名 京都大学微分トポロジーセミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yosuke Kubota
2. 発表標題 A codimension 2 index obstruction to positive scalar curvature and the Calkin algebra
3. 学会等名 首都大学東京幾何セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yosuke Kubota
2. 発表標題 On some structural properties of self-similar groupoids
3. 学会等名 名古屋大学量子解析セミナー
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yosuke Kubota
2. 発表標題 Crystallographic T-duality via the Baum-Connes isomorphism
3. 学会等名 研究会「トポジカル表面状態，ソリトンとブレーン，指数定理」
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yosuke Kubota
2. 発表標題 Lifting finite propagation operators --- applications to geometry and physics
3. 学会等名 The Second Australia-China-Japan-Singapore-U.S. Index Theory Conference -- Noncommutative Geometry and K-Theory
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 窪田 陽介	4. 発行年 2023年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 224
3. 書名 物性物理とトポロジー	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------