

令和 5 年 6 月 12 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14567

研究課題名（和文）放物型方程式における解の特異性保持メカニズムの解明

研究課題名（英文）Mechanism of singularity preservation for solutions in parabolic equations

研究代表者

高橋 仁 (Takahashi, Jin)

東京工業大学・情報理工学院・助教

研究者番号：40813001

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：非線形放物型偏微分方程式の典型例の一つである半線形熱方程式に対し、特異点の位置が時間依存して動いていくような解（動的特異点を持つ解）を構成し、その解の特異点近傍での挙動を特定した。さらに、特異性がどのように失われるかという観点から初期値問題や初期値境界値問題を考察し、解が存在するための精密な条件を与えた。また、fast diffusion方程式と呼ばれる非線形拡散を伴う放物型方程式に対しては、蛇行特異性や異方的特異性といったこれまでに知られていなかった特異解を構成した。加えて、同方程式における特異性の消失現象と、対応する幾何学流における完備性の消失との関連を見出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

偏微分方程式論における解の特異性はこれまで盛んに研究されてきた。しかし、特異性を保持する解や、その位置が時間依存して動くようなものはあまり扱われてこなかった。本研究においては非線形放物型偏微分方程式の典型例に対し、ある種の臨界的状況において特異解を構成し解析するとともに幾何との関連も得ている。それゆえ、特異解の研究を大きく進展させ、さらに広がりを与えたという学術的意義がある。

研究成果の概要（英文）：For the semilinear heat equation (a typical example of a nonlinear parabolic partial differential equation), we constructed solutions with a time-dependent singularity and specified the behavior of the solutions near the singular point. Moreover, in view of the loss of singularity, we also studied initial value problems and initial boundary value problems. Then, we obtained sharp conditions for the solvability of the problems. For the fast diffusion equation (an example of a parabolic equation with nonlinear diffusion), we constructed new types of singular solutions such as snaking singularity and anisotropic singularity. Furthermore, we found a relation between the blow-down of singularity in the fast diffusion equation and the disappearance of completeness in the corresponding geometric flow.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：半線形熱方程式 fast diffusion方程式 多孔質媒体方程式 特異解 臨界指数 可解性 山辺流

1. 研究開始当初の背景

Bôcher (1903)による調和関数の孤立特異点の分類など、偏微分方程式論における特異点解析は古くから発展してきた。Brezis-Véron (1980)により、ベキ乗型非線形項をもつ非線形楕円型方程式の孤立特異点の除去可能性定理が示された。それを契機に、L. Véron 氏らの研究グループが中心となって非線形楕円型方程式に対する特異点近傍での解挙動の分類や特異解の構成が盛んに行われてきた。それらの結果は Véron (1996)や Marcus-Véron (2014)の本にまとめられている。

一方、非線形放物型方程式については Quittner-Souplet (2007)の本に見られるように、解の何らかのノルムが有限の時刻で発散する現象(blow-up)や、有界な時間大域解の挙動が現在まで盛んに研究されてきた。それゆえ、各時刻において常に特殊な現象の起こっている解、すなわち特異性を保持する解については 2000 年代に入ってもあまり研究がなされていなかった。そのような状況の下、佐藤-柳田(2009)により、冪乗型の非線形項を持つ半線形熱方程式に対し、動的特異点を持つ解が発見された。動的特異点を持つ解とは、各時刻で常に空間変数に関する特異性を持っており、さらにその位置が時刻に依存して動くものを指す。

佐藤-柳田(2009)の手法は特異性をもつ定常解(特異定常解)まわりでの線形化に基づくため、非線形項の冪の指数が Serrin 指数(空間次元により定まるある種の臨界指数)に関して劣臨界である場合など、全空間上の特異定常解が存在しないときには適用することができない。そこで研究代表者は菅氏との共同研究(2016, 2017)により、そのような場合について時空間内の曲線上で発散する解(各時刻では 1 点で特異な解)を考察した。結果として、解が動的特異点をもつならば特異性は時空間内の曲線上に台を持つある種の測度により駆動されるということを示した。また、各時刻における特異点近傍での解の挙動は、Laplace 方程式の基本解に局所可積分関数をかけたものであるということも分かった。さらに、実際に動的特異点を持つ解が存在するための最適な十分条件を得た。これらにより、Serrin 劣臨界の場合には、解が動的な特異性を保持するためのメカニズムがほぼ完全に同定できていた。

また、菅氏と研究代表者の共同研究においては、線形部分である線形熱方程式の動的特異点を持つ解の詳細な解析が本質的であった。それゆえ、線形部分を持たない方程式、例えば多孔質媒体型の放物型方程式に対しては今までに開発した手法を用いることができない。スロバキアの M. Fila 氏と柳田英二氏と研究代表者による共同研究(2019)によってある範囲の指数に対しては動的特異点を持つ解の構成に成功したが、多孔質媒体型方程式における動的特異性を持つ解の構造や、特異性保持のメカニズムは未だ明らかになっていない。

2. 研究の目的

本研究の目的は問い「放物型偏微分方程式の解が特異性を保持するためのメカニズムは何か」に答えることにより、放物型方程式の解が動的な特異性を保持するためのメカニズムを解明し特異解の構造を理解することである。そのために、これまでの研究代表者らの研究では深くは扱えなかった方程式(Serrin 臨界な半線形熱方程式、ポテンシャル付き熱方程式、多孔質媒体型方程式)を扱い、特異解を分類・構成する。そして個別の問題に共通するエッセンスを抽出することで統一的な視点を与えたい。また、研究の後半においては山辺フローといった微分幾何学との関連も探っていく。

3. 研究の方法

上述の問いに答えるため、できるだけシンプルかつ典型的な放物型方程式を対象として特異解の解析を行う。具体的には以下の通りである。

(a) Serrin 臨界な半線形熱方程式に対する動的特異点

Serrin 劣臨界においては菅-研究代表者(2017)により、優臨界の場合には佐藤-柳田(2009)により動的特異点を持つ解が構成されていた。ちょうど臨界の場合には、特異性を測度により駆動させることはできず、さらに全空間上の特異定常解も存在しないため、それら論文の手法は使えない。ここでは有界領域上であれば特異定常解が存在するという事実に着目し、それを元にした近似解により全空間上の真の解を構成する。このトピックは研究担当者が単独で解析を進める。

(b) Fast diffusion 方程式における特異解

非線形性の指数が 1 より小さい多孔質媒体型方程式は fast diffusion 方程式と呼ばれる。この方程式に対し、明示的に書ける特異定常解をうまく変形することで特異点近傍での比較関数(優解と劣解)を構成する。次に形式的な観察により解の挙動を調べ、それを元に特異点の遠方での比較関数を構成する。そしてそれらを上手くつなげることによって全域での比較関数を構成し真の解の存在をいう。このトピックはスロバキアの M. Fila 氏、柳田英二氏、研究代表者を中心とした共同研究により解析を進める。

(c)多孔質媒体型方程式の特異解と山辺フローとの関係

ある臨界指数を持つ fast diffusion 方程式は、山辺汎関数の勾配流である山辺フローと関係が深い。実際、山辺汎関数をユークリッド空間の標準計量の共形類に制限し、勾配流方程式を変形していくと fast diffusion 方程式が得られる。ここでは有限の時刻では強い特異性を持ち、時間無限大で有界になるような解を構成し、それを山辺フローの文脈に翻訳する。このような手法により、有限の時刻では完備であって時間無限大では非完備な計量を構成する。また、方程式からある種の積分不等式を導き、解の一意性を証明する。このトピックは山本光氏との共同研究により解析を進める。

(d)逆 2 乗ポテンシャルを持つ熱方程式に対する動的特異点

時間依存する逆 2 乗ポテンシャルを持つ熱方程式について動的特異点を持つ解の分類と構成を行う。まず球対称なクラスで特異解を構成しておき、その摂動として動的特異点を持つ解を構成する。また、熱核を用いた積分方程式による解の表示をうまく変形しておくことにより比較関数を構成し、特異解のあるクラスでの非存在や一意性を示す。このトピックは台湾の J. L. Chern 氏、韓国の G. Hwang 氏、柳田英二氏と研究代表者との共同研究により解析を進める。

(e)半線形熱方程式の可解性

特異性をもつ初期値をとともなう初期値問題に対し、正の時刻で有界となる解の存在について考える。これは、どのような場合に解は特異性を失うか、という観点から重要である。外力項付き半線形熱方程式や Hardy 型半線形熱方程式の全空間での可解性を考察するとともに、半空間であって Dirichlet 境界条件を課した冪乗型半線形熱方程式や、Riemann 多様体上での半線形熱方程式の可解性も扱う。このトピックは比佐幸太郎氏、石毛和弘氏と研究代表者を中心とした共同研究により解析を進める。

4. 研究成果

前項目の各トピックについて以下の成果を得た。それら成果は放物型方程式における特異解の研究を大きく進展させるとともに幾何的に意味のあるものも含んでおり、学術的意義のあるものである。一方で、特異解の構成については一定水準以上の進展が得られたものの、分類については未解決な部分も残っている。それゆえ解の特異性保持メカニズムの理解は進んだが、全容の解明には至らなかった。それゆえ特異解の分類の深化を今後の課題としたい。

(a) Serrin 臨界な半線形熱方程式に対し、全空間上では動的特異点を持つ時間局所解を構成し、有界領域上では時間全域解を構成した。さらに、その解の特異点近傍での挙動も特定できている。着手した段階では気づいていなかったが、構成した解がある種の臨界的関数空間に属していることも分かった。結果的には、臨界クラスにおける解の非一意性の新たな反例を与えることに成功しており、インパクトの大きな結果となった。

(b) M. Fila 氏、柳田英二氏、研究代表者の三者と P. Macková 氏により、先行研究では扱われていなかった空間 2 次元の場合に動的特異点を持つ解を構成した。また、特異点近傍で非等方的な挙動をしている特異解を構成した。さらに、三者と J. R. King 氏により snaking singularity (蛇行特異性)と呼ぶべき新たな特異解を構成した。これは時間が経つごとに特異性が曲線に沿って伸びていく解であり、方程式の見た目からは想像の難しい、新規性の高い解である。

(c) 山本光氏との共同研究により、有限の時刻では完備であって時間無限大では非完備な計量を構成し、さらにその一意性を示した。これまでには非完備な初期値からスタートして一瞬で完備になるような解や、完備な初期値からスタートして有限時間で非完備になるような解は知られていたが、無限時間かけて非完備になるものは知られていなかった。今後の課題として、どのように非完備になるかといったプロファイルの特定を行おうと考えている。

(d) J. L. Chern 氏、G. Hwang 氏、柳田英二氏と研究代表者との共同研究により、時間依存する逆 2 乗ポテンシャルを持つ線形熱方程式について動的特異点を持つ解を構成した。さらにあるクラスでの特異解の非存在や一意性を示した。この結果は非線形問題を扱う際の近似解として用いることができるのではないかと期待している。

(e) 比佐幸太郎氏、石毛和弘氏と研究代表者との共同研究により、外力項付き半線形熱方程式や Dirichlet 境界条件を課した半空間上の半線形熱方程式に対し、現状では最もシャープな可解性条件を得た。また、比佐氏と研究代表者との共同研究により Hardy 型半線形熱方程式の解の存在条件を得た。さらに、山本氏と研究代表者との共同研究により、これまでに知られていたユークリッド空間上での半線形熱方程式の可解性条件を Riemann 多様体上に拡張することができた。それゆえ、可解性に関しても一定の成果を上げることができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 12件／うち国際共著 3件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hisa Kotaro, Ishige Kazuhiro, Takahashi Jin	4. 巻 376
2. 論文標題 Initial traces and solvability for a semilinear heat equation on a half space of \mathbb{R}^N	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 5731--5773
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/8922	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takahashi Jin, Yamamoto Hikaru	4. 巻 23
2. 論文標題 Solvability of a semilinear heat equation on Riemannian manifolds	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 55pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00028-023-00883-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takahashi Jin, Yamamoto Hikaru	4. 巻 61
2. 論文標題 Infinite-time incompleteness of noncompact Yamabe flow	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 24pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00526-022-02331-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Fila Marek, Mackova Petra, Takahashi Jin, Yanagida Eiji	4. 巻 35
2. 論文標題 Anisotropic and isotropic persistent singularities of solutions of the fast diffusion equation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Differential and Integral Equations	6. 最初と最後の頁 729--748
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.57262/die035-1112-729	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takahashi Jin	4. 巻 3
2. 論文標題 Entire solutions with moving singularities for a semilinear heat equation with a critical exponent	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Partial Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s42985-022-00164-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fila Marek, King John Robert, Takahashi Jin, Yanagida Eiji	4. 巻 374
2. 論文標題 Solutions with snaking singularities for the fast diffusion equation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 8775 ~ 8792
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/8479	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hisa Kotaro, Takahashi Jin	4. 巻 296
2. 論文標題 Optimal singularities of initial data for solvability of the Hardy parabolic equation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 822 ~ 848
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2021.06.011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahashi Jin	4. 巻 148
2. 論文標題 Existence of solutions with moving singularities for a semilinear heat equation with a critical exponent	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal de Mathematiques Pures et Appliquees	6. 最初と最後の頁 128 ~ 149
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.matpur.2021.02.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chern Jann-Long, Hwang Gyeongha, Takahashi Jin, Yanagida Eiji	4. 巻 -
2. 論文標題 On the evolution equation with a dynamic Hardy-type potential	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00028-021-00675-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Hisa, K. Ishige, J. Takahashi	4. 巻 -
2. 論文標題 Existence of solutions for an inhomogeneous fractional semilinear heat equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinear Anal.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. Fila, P. Mackova, J. Takahashi, E. Yanagida	4. 巻 -
2. 論文標題 Moving singularities for nonlinear diffusion equations in two space dimensions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Elliptic Parabol. Equ.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s41808-020-00062-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R. Sato, J. Takahashi	4. 巻 482
2. 論文標題 Critical exponents for the fast diffusion equation with a nonlinear boundary condition	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Math. Anal. Appl.	6. 最初と最後の頁 123526, 9pp.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2019.123526	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計19件（うち招待講演 19件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 高橋仁
2. 発表標題 Sobolev優臨界な藤田型方程式における臨界ノルム爆発について
3. 学会等名 発展方程式における形状解析と漸近解析（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 高橋仁
2. 発表標題 Critical norm blow-up for a supercritical semilinear heat equation
3. 学会等名 Mathematical Analysis on Fluid Dynamics and Conservation Laws（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 高橋仁
2. 発表標題 Critical norm blow-up for a supercritical semilinear heat equation
3. 学会等名 Seminar on Qualitative Theory of Differential Equations（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 高橋仁
2. 発表標題 Blow-up of the critical norm for a supercritical semilinear heat equation
3. 学会等名 Seminar at Johns Hopkins University（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 高橋仁
2. 発表標題 Blow-up of the critical norm for a supercritical semilinear heat equation
3. 学会等名 静岡大学におけるセミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 高橋仁
2. 発表標題 Existence of solutions with moving singularities for a semilinear heat equation with a critical exponent
3. 学会等名 京都大学 NLPDE セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 高橋仁
2. 発表標題 Fast diffusion方程式における特異解の無限時間blow-downについて
3. 学会等名 神戸大学解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Jin Takahashi
2. 発表標題 Infinite-time blow-down of singular solutions in the fast diffusion equation
3. 学会等名 SIAM Conference on Analysis of PDE（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 高橋仁
2. 発表標題 非斉次半線形熱方程式のシャープな可解性条件について
3. 学会等名 Elliptic & Parabolic セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 高橋仁
2. 発表標題 $\$u_t - \Delta u = u^{\frac{N}{N-2}}\$$ に対する動的特異点を持つ解の構成
3. 学会等名 楕円型・放物型方程式の集いの会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 高橋仁
2. 発表標題 ある臨界指数を持つ藤田型方程式に対する動的特異点を持つ解の存在について
3. 学会等名 鳥取 PDE 研究集会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 高橋仁
2. 発表標題 ある臨界指数を持つ半線形熱方程式における動的特異点を持つ解の存在について
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 高橋仁
2. 発表標題 ある臨界指数を持つ半線形熱方程式に対する動的特異点を持つ解の存在について
3. 学会等名 広島数理解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 高橋仁
2. 発表標題 Hardy parabolic equationの時間局所可解性について
3. 学会等名 応用解析研究会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 J. Takahashi
2. 発表標題 Existence of solutions with moving singularities for a semilinear heat equation with a critical exponent
3. 学会等名 Seminar on Qualitative Theory of Differential Equations, Comenius University, Slovakia (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 J. Takahashi
2. 発表標題 Existence of solutions with time-dependent singular sets for the heat equation with absorption, Singular Problems,
3. 学会等名 Blow-up, and Regimes with Peaking in Nonlinear PDEs, RUDN University, Russia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 J. Takahashi
2. 発表標題 Existence of solutions to an inhomogeneous fractional heat equation
3. 学会等名 Seminar on Qualitative Theory of Differential Equations, Comenius University, Slovakia (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高橋仁
2. 発表標題 Existence of solutions with moving singularities for equations of porous medium type
3. 学会等名 Workshop on Nonlinear PDE in Numazu, 沼津市民文化センター (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 J. Takahashi
2. 発表標題 Existence of solutions with time-dependent singular sets for the heat equation with absorption
3. 学会等名 VI Italian-Japanese Workshop "Geometric properties for parabolic and elliptic PDE's", Palazzone di Cortona, Italy (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
スロバキア	Comenius University			
韓国	Yeungnam University			
台湾	National Taiwan Normal University			
英国	University of Nottingham			