

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 23 日現在

機関番号：24201

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14573

研究課題名（和文）退化型準線形波動方程式の正則性理論の構築とその応用

研究課題名（英文）Regularity Theory for Degenerate Quasilinear Wave Equations and its Applications

研究代表者

杉山 裕介 (Sugiyama, Yuusuke)

滋賀県立大学・地域・ひと・モノ未来情報研究センター・准教授

研究者番号：30712161

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,300,000円

研究成果の概要（和文）：空間1次元準線形波動方程式の解の有限時間爆発に関する新しい定理を証明した。特に、質量保存を持つ圧縮性オイラー方程式や1次元elastic systemとエネルギー保存を持つ変分型非線形波動方程式を繋ぐようにパラメータ付けを行った準線形波動方程式の初期値問題において、解の有限時間爆発が起こるための十分条件を与えた。さらに、空間無限遠方で退化する準線形波動方程式の可解性を証明した。主要部以外の空間1階偏微分の係数の減衰具合も可解性に関係することを証明した。  
変数係数摩擦項付き空間1次元圧縮性オイラー方程式の時間大域解の存在と解の爆発の新しい結果も証明することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究においては、圧縮性流体や液晶中のエントロピー波の挙動を記述する準線形波動方程式やその関連方程式の研究を行った。特に、基本的な問題である解の存在と解が有限時間で存在しなくなる現象（解の爆発）の新しい定理を証明した。解の存在については、無限遠方における退化性という、これまで研究例のなかった条件のもとで考察を行った。解の爆発の研究は、既存の研究においては、方程式の持つ対称性（より具体的には保存則）を使って証明を行うのが一般的であったが、この研究では、そういった構造のない方程式において、解の爆発が起こる条件を与えた。

研究成果の概要（英文）：We prove a new theorem on finite-time blow-up of solutions of the spatial 1D quasilinear wave equation. In particular, we gave sufficient conditions for finite-time blow-up of solutions in the initial value problem of the quasilinear wave equation parameterized to connect the compressible Euler equation with mass conservation and the one-dimensional elastic system with the variational nonlinear wave equation with energy conservation. Moreover, solvability of the quasilinear wave equation degenerate at spatial infinity is also proved. It is proved that the decay of the coefficients of the first-order partial derivatives in space other than the main part is also related to the solvability.

I also prove new results on the existence of time global solutions and the blow-up for the one-dimensional compressible Euler equations with time and space dependent damping terms.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：解の爆発 解の正則性 波動方程式 圧縮性オイラー方程式 方程式の退化

### 1. 研究開始当初の背景

楕円や放物型の方程式においては、退化型準線形方程式の解の正則性や時間大域的弱解の存在などが盛んに研究されているが、準線形双曲型方程式については比較原理に相当する性質がない等の困難があり、研究が少ない。一方で楕円や放物型方程式にはない非退化な方程式から退化な方程式へ遷移する「有限時間での方程式の退化」という双曲型方程式特有の現象があることが申請者の研究によって分かってきている。この研究ではまず elastic system と呼ばれる空間 1 次元双曲型保存則系を取り扱う。この方程式には、細長い管内の圧縮性気体の密度や速度を記述する圧縮性 Euler 方程式でもある。また双曲型保存則系で書くことができ、物理的にも数学的にも基礎的な方程式である。申請者の研究によって「有限時間での方程式の退化」という概念が与えられ、有限時間での方程式の退化が起こるための条件が与えられた。つまり、初期時刻である正定数以上であった伝播速度が有限時間で 0 へと近づき、方程式が有限時間で退化する条件が与えられた。この現象は比較原理が成立する多孔媒質方程式などの放物方程式には見られない、双曲型方程式特有の現象である。そこで、この研究課題の核心をなす問は、方程式の退化が解や解の正則性にどのような影響を与えるかということである。この疑問の解決は、単に退化型双曲型方程式の解の正則性理論の構築につながるだけでなく、elastic system に対する時間大域解の存在という長年の未解決問題の解決に繋がる。

### 2. 研究の目的

elastic system (空間 1 次元双曲型保存則系) を取り扱い、退化する点付近の解の正則性理論を構築し、その応用として未解決問題「古典解及び弱解の時間大域存在」の解決を目指す。その後、高次元化を中心とした一般化も目指し、「方程式の退化」を中心とした退化型準線形波動方程式の新理論の構築を目指す。また、変数係数摩擦項を持つオイラー方程式を中心とした非退化型方程式の時間大域解の存在・非存在の未解決問題の解決を目指す。

### 3. 研究の方法

elastic system においては、初期速度の積分がある閾値を超えると、有限時間において退化することが申請者に知られている。その後、何人かの研究者によって退化する点付近での解の正則性の評価が得られているが、退化する点を超えて解の存在を示すための十分な評価を得るには至っていない。特に、その閾値での解の挙動が未解決であり、退化が起こるか、または退化が起こらずに時間大域的に解が存在するかもわかっていない。それを解決するためには退化が起こる点付近での解の正則性評価を証明していくことが有効であることが分かってきている。

一方で、弱解(非退化方程式の)まで解の概念を拡張することで、不連続解(衝撃波)を扱えることとなり、物理的に重要な問題である。この問題については、近似解に対する非退化性を保証する評価が未だに知られておらず、長いこと未解決の問題として残されている。ここでは、リーマン不変量に対する compensated compactness の方法やその精密化を使って証明を完成させる。

上記の研究において培われるであろう評価の方法を、elastic system 以外の方程式または高次元の問題に応用する。例えば、変数係数摩擦項付き圧縮性オイラー方程式は、近年解の爆発や爆発時刻の評価も含めて非常に活発に研究されている。しかしながら、摩擦係数が空間変数に依存する問題については、未解決のものが多く、上記の研究で培われたリーマン不変量を使った解自身の評価が有効であり、それをを用いて解決を目指す。

### 4. 研究成果

空間無限遠方で退化する準線形波動方程式の可解性を証明した。主要部以外の空間 1 階偏微分の係数の減衰具合も可解性に関係することを証明した。このことは、既存の線形弱双曲型方程式の研究において「Levi 条件」と呼ばれるもので、無限遠方で退化する方程式にも現れることが明らかになった。この結果は、査読付きの国際誌 Communication Mathematical Science から出版済みである。またこの結果の高次元化についても証明が完成しており、現在論文投稿中である。高次元版の結果では、重み付き一様局所ソボレフ空間と呼ばれる新しい解空間を使っている。さらに、この 1 次元の結果を、熱弾性方程式へと拡張した結果を Yanbo Hu(杭州師範大学)とともに証明した。この結果についても現在論文投稿中である。空間有限な点における退化型方程式の可解性は、未解決であるが、この無限遠点での退化の問題において構築した重み付き評価の方法が有効であることが現在までに分かって来ており、今はその証明に取り組んでいる。

一方で、変数係数摩擦項付き空間 1 次元圧縮性オイラー方程式の時間大域解の存在と解の爆発の新しい結果も証明することができた。より具体的には、摩擦項の空間方向の減衰率に応じて、小さな初期値を持つ解が時間大域的に存在するか否かを決定する定理を証明した。摩擦項付きオイラー方程式に対する新しい最大値原理が証明の鍵となっていた。この結果は、現在論文投稿中である。

さらに、空間 1 次元準線形波動方程式の解の有限時間爆発に関する新しい定理を証明した。特

に、質量保存を持つ圧縮性オイラー方程式や1次元 elastic system とエネルギー保存を持つ変分型非線形波動方程式を繋ぐようにパラメータ付けを行った準線形波動方程式の初期値問題において、解の有限時間爆発が起こるための十分条件を与えた。この結果は、すでに査読付き国際誌 Indiana Mathematical Journal から出版済みである。

双曲型方程式の問題ではないが、山本征法氏（新潟大学）との共同研究によって、分数冪拡散項を持つ移流拡散方程式の定常解とその安定性についての論文を2篇出版した。方程式は異なるが、上記の研究で得たエネルギー法のテクニックがこれらの論文でも使われている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Sugiyama Yuusuke	4. 巻 71
2. 論文標題 Formation of singularities for a family of 1D quasilinear wave equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Indiana University Mathematics Journal	6. 最初と最後の頁 2529 ~ 2549
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1512/iuj.2022.71.9196	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Sugiyama Yuusuke	4. 巻 21
2. 論文標題 Local solvability for a quasilinear wave equation with the far field degeneracy: 1D case	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 219 ~ 237
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/cms.2023.v21.n1.a10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Masakazu Yamamoto, Yuusuke Sugiyama	4. 巻 149
2. 論文標題 Optimal estimates for far field asymptotics of solutions to the quasi-geostrophic equation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1099-1110
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Masakazu Yamamoto, Yuusuke Sugiyama	4. 巻 -
2. 論文標題 Asymptotic stability of stationary solutions to the drift-diffusion model with the fractional dissipation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00028-020-00628-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuusuke Sugiyama	4. 巻 85
2. 論文標題 Remark on global existence of solutions to the 1D compressible Euler equation with time-dependent damping	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 379-389
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 杉山裕介
2. 発表標題 ある1次元準線形波動方程式の解の爆発
3. 学会等名 大阪大学微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 杉山裕介
2. 発表標題 変数係数摩擦項を持つ1次元圧縮性オイラー方程式に関する注意
3. 学会等名 The Second One Day Workshop on Hyperbolic PDE in Kushiro (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 杉山裕介、山本征法
2. 発表標題 On the self-similar solution to the 1D drift-diffusion equation with the half-Laplacian
3. 学会等名 黒木場正城教授 追悼研究集会「非線型偏微分方程式と走化性」(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 杉山裕介
2. 発表標題 変数係数摩擦項を持つ 1 次元圧縮性オイラー方程式の時間大域解の存在
3. 学会等名 偏微分方程式の解の特異性とその周辺
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 杉山裕介
2. 発表標題 Formation of singularities for the 1D compressible Euler equation with time and spacedependent damping
3. 学会等名 Saga Workshop on Partial Differential Equations (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 杉山裕介
2. 発表標題 Local solvability for a quasilinear wave equation with the far files degeneracy
3. 学会等名 Online Seminar on Hyperbolic PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 杉山裕介
2. 発表標題 Formation of singularities for 1D quasilinear wave equations,
3. 学会等名 Online Seminar on Hyperbolic PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 杉山裕介
2. 発表標題 Finite time blow-up for parameterized 1D quasilinear wave equations
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 杉山裕介
2. 発表標題 Asymptotic stability of stationary solutions to the drift-diffusion model with the fractional dissipation
3. 学会等名 楢岡型・放物型微分方程式研究集会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 杉山裕介
2. 発表標題 Stationary and nonstationary problems for the drift-diffusion equation with fractional dissipation
3. 学会等名 国際研究集会「Chemotaxis and Nonlinear Parabolic Equations」（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 杉山裕介
2. 発表標題 Asymptotic stability of stationary solutions to the drift-diffusion model with the fractional dissipation
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	杭州師範大学			