様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　 ５ 月 １６ 日現在

機関番号：３２６６５
研究種目：若手研究
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ１４５７７

研究課題名（和文）Hausdorff容量を用いた関数空間の研究

研究課題名（英文）Research of function spaces with Hausdorff capacities

研究代表者
齋藤　洋樹（SAITO, Hiroki）

日本大学・理工学部・准教授

研究者番号：２０７３６６３１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,400,000円

研究成果の概要（和文）：調和解析や偏微分方程式において，Rieszポテンシャルや関連する分数冪極大関数が重要な役割を果たす．本研究によって荷重付Hausdorff容量を用いて定義されるChoquet空間上でFefferman-Stein型不等式を示した．またChoquet空間の双対空間についてAdams証明に別証明を与えた．このとき測度を原料とするMorrey空間が重要な役割を果たすが，これまでの結果から荷重付分数冪Besov空間をChoquet空間に埋め込むための荷重の十分条件を得た．その際，Rieszポテンシャルが上記のMorrey空間上でLifting効果が重要な役割を果たすことを明らかにした．

研究成果の学術的意義や社会的意義
近年Hausdorff容量が非整数次元の幾何的特徴を制御できることから，幾何学，偏微分方程式などへの応用は盛んになっており，Hausdorff容量を用いて定義される関数空間の性質の重要性が高まってきている．本研究によってRieszポテンシャルがChoquet空間などに与える影響が明らかになったことは，微分の作用がChoquet空間の次元にどう影響を与えているか，また荷重付Besov空間をChoquet空間に埋め込むための条件を理解することができるようになったことを意味し，幾何学と偏微分方程式に対する新たな手法を提案できているという意味で，意義があるものであると考えられる．

研究成果の概要（英文）：The Riesz potential and fractional maximal function contribute significantly to Harmonic analysis and PDEs. We establish the Fefferman-Stein type inequalities on the weighted Choquet spaces using weighted Hausdorff capacities. Additionally, we gave an alternative proof for the dual theorem of Choquet spaces, originally due to Adams. To accomplish this, the Morrey space consisting of measures plays a crucial role. These results provide a sufficient condition of weights for an embedding theorem of weighted Besov spaces into weighted Choquet spaces. It is clarified that the lifting effect of Riesz potential on such Morrey spaces is of importance.

研究分野：調和解析

キーワード：Hausdorff容量　分数冪極大関数　Rieszポテンシャル　荷重理論　Besov空間　Morrey空間

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

１．研究開始当初の背景

（１）調和解析・実解析の研究において，Hausdorff 容量は重要な役割を果たし，以下に説明するように偏微分方程式やポテンシャル論とも関連の深い概念である．Lebesgue の微分定理は，n 次元の空間に定義された f に対し x を中心とする半径 r の球上の積分平均をとり，r を 0 に近づけたとき，その極限が $f(x)$に収束することを主張するものである．この事実は f が局所可積分関数であれば Lebesgue の零集合を除くすべての x で正しいが，Sobolev の意味で微分可能（弱微分可能）な関数に対しては，滑らかさに起因してもう少し多くの点で成立することが期待できる．この予想は f が Sobolev 空間 $W^{\alpha,p}$ の元に対し、Hausdorff 容量 $H^{n-\alpha p}$ 零の集合を除き微分定理が成り立つという主張で理解される(α は自然数)．このことは，Sobolev の意味の滑らかさを Hausdorff 容量によって定量的に捉えることができることを意味する．また Hausdorff 容量で定義される Choquet 空間によって，Morrey 空間の双対空間のひとつの表現と同一視されるが，Morrey 空間は導関数の情報から各点評価の情報である Hölder 連続性導き，楕円型方程式への応用を持つ空間である．

（２）Hausdorff 容量によって図形の境界の滑らかさやそこに含まれる除外集合などを調べるには，適切な関数空間とその上の作用素を考えることで理解することができる．このようなことは例えば，等周不等式という幾何の問題と，Sobolev の埋め込み定理が同値となることからもわかるように，現代数学の常套手段となっている．d 次元($0<d<n$)Hausdorff 容量 H^d は非加法的測度となるが，Choquet 式の積分が定義され、Lebesgue 積分と同様に Choquet の p 乗可積分空間 $L^p(H^d)$が定義される．先行研究においてこの空間上で作用する種々の作用素の有界性が示されているが，特異積分作用素については未解決なことが多く，Hardy-Littlewood の極大関数，分数幂極大関数, そして Riesz ポテンシャルについて部分的なことがわかっているだけであった(①).

（３）分数幂 Sobolev 空間(Slobodeckij 空間とも呼ばれる)を定義するノルムから定義される Sobolev 容量は、測りたい集合の定義関数上で 1 をとるような Sobolev 関数のノルムの下限で定義される．Xiao は②の論文において，この下限を実現(attain)する関数が(α,p)-Laplace 方程式と呼ばれる偏微分方程式の解となることを示した．②の論文では分数幂 Sobolev 空間の必要な性質と Hausdorff 容量の関係を調べることで，いくつかの埋め込み定理と上記の解の表現定理を得ている．

２．研究の目的

荷重とは簡単に言えば非負の可測関数ということになるが，以下のように偏微分方程式やポテンシャル論に重要な応用を持つ．Schrödinger 作用素$-\Delta-v$ が正値作用素となる(固有値がすべて正)ことの十分条件として，Riesz ポテンシャルに対する荷重付き不等式(トレース不等式)の有界定数が 1 未満であることが知られている(③)．また荷重付 Sobolev 空間から定義される荷重付 Sobolev 容量は，荷重付 Hausdorff 容量で制御されるなど，偏微分方程式の理論と深くかかわっている．しかしながら，荷重付容量から定義される Choquet 空間の性質や，その上の作用素の振る舞いは未解明な部分が多い．

（１）本研究の主題の一つは，荷重付 Hausdorff 容量によって定まる Choquet 空間の性質を調べ，重要な作用素の有界性を満足する荷重の条件を与えることで，これまでの研究をさらに深化させることである．

（２）本研究課題の二つ目の主題は，荷重付分数幂 Sobolev 容量を定義し，荷重付 Hausdorff 容量の関係を明らかにし，適切に定式化された荷重付(α,p)-Laplace 方程式の解の表示を見出し，Xiao による②の結果を拡張することである．

３．研究の方法

（１）調和解析・実解析においては Muckenhoupt の荷重のクラス A_p が有用である．Hausdorff 容量に付加する荷重についても A_p クラスを仮定する研究が多いが，Hardy-Littlewood の極大関数や，分数幂極大関数の有界性を Choquet 空間で論じる場合は一般の荷重に対し Fefferman-Stein 型の不等式が成り立つ可能性を模索した．また双対空間などを論じる場合は指数 p の端点である 1 と∞の場合で特殊なことが起こる．それに応じて Muckenhoupt の指数を 1 や∞にしても双対空間を制御できないことが予想された．そこでこの場合は荷重付 Hausdorff 容量を含む一般化した Hausdorff 容量を定義して，双対空間を定式化することを目指した．

（２）二つ目の研究課題となる(α,p)-Laplace 方程式は，先行研究②において分数幂 Sobolev ノルムを原料にした容量によって解の表示を得ていた．荷重付(α,p)-Laplace 方程式を調べるには関数空間に適切な荷重を付けなければならないが，最初に特別な場合である斉次 Besov 空間について調べた．研究計画の段階では荷重に何らかの条件が必要であることが予想されていたが，本研究でも Muckenhoupt の A_p 条件を必要とすると予想した．この条件が適切であると分かると荷重付斉次 Besov 空間の双対空間も特徴付けるための方策ができる．Riesz ポテンシャルがその双対空間でリフティング効果を持つことを示し，荷重付斉次 Besov 空間を荷重付 Choquet 空間に埋め込むことを意味する不等式が示せる．これは本研究を進めるうえで決定的な役割を果た

し，二つ目の研究課題の半分までを解決することができる．
（３）分数幕 Sobolev 空間に荷重を付ける研究は海外の研究者を中心に進められているが，冪型荷重という特別な場合で研究されている．しかしながら，一般的な荷重を付けることは難しく，また双対空間などの性質を明らかにすることができなかった．そのため研究計画の後半については方針を変更しなければならなかった．この間，Riesz ポテンシャルの Choquet 空間上での有界性を精査していたところ，Kolmogorov 型の不等式を応用することで，弱空間から弱空間への有界性を示せる可能性を見出せた．最終年度ではこの研究を推し進めた．

４．研究成果
（１）分数幕極大関数 M_α が Choquet 空間 $L^p(H^d)$上で有界となることは Adams によって示されていた(①)が、非常に関連の深い、かつ応用上重要な Riesz ポテンシャルの有界性については知られていなかった．④の論文において，2 進立方体を用いた離散型 Riesz ポテンシャルについて Choquet 空間で有界となることを示した．正確には $1/q=1/p-\alpha/d$ という条件の下で離散型 Riesz ポテンシャルは $L^p(H^d)$から $L^q(H^d)$への有界作用素となる．この論文では $0<p\leqq1$ について $L^p(H^d)$を block 分解（アトム分解の特別なもの）と呼ばれる手法で分解し、1 つの 2 進立方体 Q の定義関数について所望の作用素の振る舞いを調べることに問題を帰着している．これは $T1$ 定理や Tb 定理の類似であると言える．このことにより，強極大関数や分数幕極大関数，Hardy-Littlewood の極大関数の合成を含む多くの作用素の有界性を統一的に議論できるようになった．分数幕極大関数については荷重付 Hausdorff 容量で議論しており、Fefferman-Stein 型の不等式を証明した．Fefferman-Stein の不等式は，インプットの関数空間が，極大関数を作用させた荷重 Mw が付随するものとなる．分数幕極大関数についてもその荷重を $M_\alpha w$ という定式化が可能であるが、その一方で Riesz ポテンシャルについてはこの定式化はできず（付随する荷重に Riesz ポテンシャルは作用できない），Fefferman-Stein 型の不等式を得ることはできない．したがって，Riesz ポテンシャルについては荷重なしの結果にとどまった．
（２）Adams は①の論文において Choquet 空間の双対空間を Borel 測度がなす Morrey 空間として決定していたが，この論文で示されている証明には誤りがあることがわかった．そこでは Hausdorff 容量 H^d を特別な Borel 測度μに議論を帰着するという，Frostman の補題が用いられていたが，そこから導かれる不等式に矛盾があることがわかった．⑤においてその誤りを説明する反例を与えて指摘するとともに、一般化した Hausdorff 容量の定式化のもと，別証明を与えた．⑤で行われる議論は，2 進立方体がなす被覆が与えられたとき，その中から排反なものをうまく選んで帰納的に進めるという複雑なものになっている．しかしごく最近さらに研究を進めた結果，より簡単な証明方法を得た．このことについては別の研究結果と合わせた論文として現在投稿中である．双対空間が決定されると多くの応用が期待できる．トレース不等式と関連して Olsen の不等式が知られているが，その証明には双対性が巧みに用いられる．Choquet 空間の双対空間が決定されたことで Olsen の不等式の拡張に着手しているが，Hausdorff 容量の持つ非加法性が問題となり，現在も研究中である．
（３）Choquet 空間の双対空間(Borel 測度の Morrey 空間)が決定されることの応用について，上述の Olsen の不等式の確立は進行中であるが，他の応用として⑥の論文において，Riesz ポテンシャルが双対空間でリフティング効果を持つことを利用して，荷重付斉次 Besov 空間を Choquet 空間に埋め込む不等式を証明することができた．埋め込み定理とはこの場合，微分の回数（滑らかさの指数）k が埋め込む先の Choquet 空間の Hausdorff 次元を下げる効果があることを示している．この論文では，荷重付き Sobolev 空間を Choquet 空間に埋め込むことができることを示している（非荷重の場合はすでに先行研究で示されている）．本研究において，荷重付 Sobolev 空間へ埋め込むための荷重の条件が Muckenhoupt A_1 を必要とし，荷重付 Besov 空間へ埋め込むための条件が A_1 かつ reverse Hölder クラス RH_∞となることを示した．荷重付 Besov 空間は様々な定式化がなされているが，Littlewood-Paley 分解を用いて可積分性に関するノルムに荷重を付けたものである．このタイプの荷重付 Besov 空間は海外の研究者を中心によく研究されており，その双対空間については調べられていた．この事実と⑤で確立した双対空間の同一視が決め手となって，埋め込み定理を示すことができた．しかしながら Besov 空間への埋め込み定理に仮定された荷重の条件(A_1 かつ RH_∞)は強い仮定であり，現在 RH_∞の仮定を除く研究を進めている．
（４）作用素の有界性は「強型」と「弱型」という呼び方が一般的であるが、前者は $L^p(\mathbf{R}^n)\to L^p(\mathbf{R}^n)$、後者は $L^p(\mathbf{R}^n)\to wL^p(\mathbf{R}^n)$への有界性を意味する．近年の研究によって，Kolmogorov 型の不等式を利用することで，Hardy-Littlewood の極大関数が $wL^p(\mathbf{R}^n)\to wL^p(\mathbf{R}^n)$型(ただし $p>1$)の有界性を満たすことが明らかにされた(以下これを(弱,弱)型と呼ぶ)．上記の事実は Lebesgue 空間での事実であったが，自身のこれまでの研究を推し進めることで，Choquet 空間で上記の事実が成り立つことを示すことができた．⑦の論文において，分数幕極大関数と Riesz ポテンシャルに対し，Choquet(弱,弱)型の不等式を示した．Kolmogorov の不等式が Hausdorff 容量に対しても成り立つことが決め手であったが，この不等式は関数の Morrey 空間の定義において，球や立方体で上限をとる範囲が可測集合全体であったことに着目し，Choquet-Morrey 空間において分数幕極大関数と，Riesz ポテンシャルが有界となることも同様に示すことができた．ただし，局所可積分性を制御する第 2 指数について技術的な条件が必要であることがわかった．

＜引用文献＞
① D.R.Adams，Choquet integrals in potential theory, Publ.Mat. 1998, 3-66.
② J.Xiao，Carleson embeddings for Sobolev spaces via heat equation, J. Differential Equations, 224，2006， 277-295.
③ R.Kerman and E.T.Sawyer，The trace inequality and eigenvalue estimates for Schrödinger operators、Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 36、1986, 207-228
④ **齋藤洋樹、田中仁、渡辺俊一**、Block decomposition and weighted Hausdorff content、Canad. Math. Bull.、63 巻, no.1、2019、141-156.
⑤ **齋藤洋樹、田中仁**、Dual of the Choquet spaces with general Hausdorff content、Studia Math.、266 巻、2022、323-336.
⑥ **齋藤洋樹**、A note on embedding inequalities for weighted Sobolev and Besov spaces、Taiwanese J. Math.、26 巻, no.2、2022、363-379.
⑦ **波多野修也、川澄亮太、齋藤洋樹、田中仁**、Choquet integrals, Hausdorff content and fractional operators、Bull. Aust. Math. Soc.、2024、online.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Hiroki Saito	４．巻 26
２．論文標題 A Note on Embedding Inequalities for Weighted Sobolev and Besov Spaces	５．発行年 2022年
３．雑誌名 TAIWANESE JOURNAL OF MATHEMATICS	６．最初と最後の頁 363-379
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.11650/tjm/211204	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Saito Hiroki、Tanaka Hitoshi、Watanabe Toshikazu	４．巻 63
２．論文標題 Block Decomposition and Weighted Hausdorff Content	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Canadian Mathematical Bulletin	６．最初と最後の頁 141～156
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4153/S000843951900033X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Saito Hiroki、Tanaka Hitoshi	４．巻 266
２．論文標題 Dual of the Choquet spaces with general Hausdorff content	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Studia Mathematica	６．最初と最後の頁 323～335
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4064/sm210415-29-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 HATANO NAOYA、KAWASUMI RYOTA、SAITO HIROKI、TANAKA HITOSHI	４．巻 －
２．論文標題 CHOQUET INTEGRALS, HAUSDORFF CONTENT AND FRACTIONAL OPERATORS	５．発行年 2024年
３．雑誌名 Bulletin of the Australian Mathematical Society	６．最初と最後の頁 1～12
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/S000497272400011X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計10件（うち招待講演　1件／うち国際学会　2件）

1．発表者名 齋藤洋樹
2．発表標題 A note on embedding inequalities for weighted Sobolev and Besov spaces
3．学会等名 日本数学会
4．発表年 2022年

1．発表者名 齋藤洋樹
2．発表標題 Choquet integrals, Hausdorff content and sparse operator
3．学会等名 日本数学会
4．発表年 2022年

1．発表者名 齋藤洋樹
2．発表標題 Some embedding inequalities for weighted Sobolev and Besov spaces
3．学会等名 NCTS Conference on Fractional Integrals and related phenomena in Analysis（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名 齋藤洋樹
2．発表標題 Weighted inequality for fractional Sobolev spaces and isoperimetric inequalities
3．学会等名 実解析シンポジウム2022
4．発表年 2022年

１．発表者名
齋藤洋樹

２．発表標題
Some embedding inequalities for weighted Sobolev and Besov spaces

３．学会等名
Real, Complex and Functional Analysis Seminar 2021

４．発表年
2021年

１．発表者名
齋藤洋樹

２．発表標題
Dual of the Choquet spaces with weighted Hausdorff content

３．学会等名
Function Spaces and Geometric Analysis and Their Applications（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
齋藤洋樹

２．発表標題
Hausdorff容量によるChoquet空間の双対空間について

３．学会等名
Real, Complex and Functional Analysis Seminar 2019

４．発表年
2019年

１．発表者名
齋藤洋樹

２．発表標題
Dual of the Choquet spaces with weighted Hausdorff content

３．学会等名
実解析シンポジウム2019

４．発表年
2019年

1．発表者名 齋藤洋樹
2．発表標題 Hausdorff容量によるChoquet空間上において強極大関数が有界となる指数について
3．学会等名 日本数学会
4．発表年 2019年

1．発表者名 齋藤洋樹
2．発表標題 Some embedding inequalities for fractional Sobolev spaces
3．学会等名 日本数学会
4．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関