

令和 5 年 6 月 26 日現在

機関番号：35302

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14578

研究課題名(和文)高次元における非線形分散型方程式の解の漸近挙動の解明

研究課題名(英文)Elucidation of the asymptotic behavior of the solution to nonlinear dispersive equations in high dimensions

研究代表者

瓜屋 航太 (Uriya, Kota)

岡山理科大学・理学部・講師

研究者番号：10779474

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：べき乗型の非線形シュレディンガー方程式の一般化として、非斉次非線形シュレディンガー方程式の終値問題の研究を行った。副産物として、空間3次元以上における逆2乗べき型ポテンシャルを持つ非斉次非線形シュレディンガー方程式の解の漸近挙動を得た。また、空間1次元において3次の非線形クライン-ゴルドン方程式系・非線形シュレディンガー方程式系、非局所非線形シュレディンガー方程式、微分形4階シュレディンガー方程式、星型グラフ上の非線形シュレディンガー方程式の解の漸近挙動についても研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非斉次非線形シュレディンガー方程式の解の漸近挙動の研究により、高次元における非線形分散型方程式の解の漸近挙動が得られる一つのモデルを与えることができた。特殊な例かもしれないが、高次元の解の漸近挙動を解明するための端緒となることが期待される。また、1次元3次の非線形クライン-ゴルドン方程式系や非線形シュレディンガー方程式系の解の漸近挙動の分類は類似の構造を持つ非線形偏微分方程式系の様々な研究に応用が可能なものである。

研究成果の概要(英文)：As a generalization of nonlinear Schroedinger equation with power type nonlinearities, we studied the final state problem for the inhomogeneous nonlinear Schroedinger equation. As a byproduct, we obtain the asymptotic behavior of the solution to the inhomogeneous nonlinear Schroedinger equation with inverse square potential in high dimensions. We also studied the asymptotic behavior of the solution to cubic nonlinear Klein-Gordon system/nonlinear Schroedinger system in one dimension, nonlocal nonlinear Schroedinger equation, 4th order derivative Schroedinger equation, nonlinear Schroedinger equation on star-graph.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：分散型方程式 漸近挙動 散乱理論

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

非線形シュレディンガー方程式の解が時間大域的に存在する場合に解の時間無限大での漸近挙動は散乱理論の枠組みで議論される。すなわち、十分時間が経過した後と解の挙動が自由解で近似できるか否かが問題となる。べき乗型の非線形項の場合には、解の漸近挙動を自由解で近似できるか否かの臨界指数が知られており、非線形項のべきが臨界指数より大きい場合には解の漸近挙動は自由解で近似することができ、臨界指数以下の場合には近似できないことが知られている。非線形項のべきがちょうど臨界指数の場合には、解の漸近挙動は自由解に位相の修正が入った修正自由解となることが、Ozawa, Ginibre-Ozawa, Hayashi-Naumkin の研究により示されている。ただし、これらの結果は空間次元が 3 次元以下という制限で示されていた。一方、Cazenave-Naumkin, Hayashi-Naumkin によって、解の減衰が遅い特殊な初期値のクラスに対して、空間次元の制限無く修正散乱の結果が得られることが示されている。ただし、より広い初期値のクラスに対して、高次元で修正散乱が起こるかということは長年の未解決問題となっている。

### 2. 研究の目的

空間次元が 4 次元以上の場合でも臨界べきをもつ非線形シュレディンガー方程式の解の漸近挙動は修正された自由解となることが予想されるが、空間 4 次元以上で解の漸近挙動の意味で臨界となる非線形項を取り扱う場合、非線形項の正則性が足りず、これまでの手法を安直に適用することができないため、解の漸近挙動を得ることに困難が生じる。本研究では、高次元における非線形分散型方程式の解の漸近挙動の解明を目標とし、そのことを念頭に低次元の場合も含めて非線形相互作用を制御する手法を発展させることを目指す。

### 3. 研究の方法

(1) 非線形分散型方程式を研究している国内外の研究者と研究討議を行う。また、そのために国内外の研究集会に積極的に参加し、最新の研究成果に関する情報収集を行う。  
(2) 研究成果が得られた場合には、研究集会、セミナー、学会などで発表を行う。参加者から得られたコメントを研究の進展に活かす。  
(3) 研究代表者は研究協力者と共同研究を行うため、相互に訪問し合い、zoom などを活用したオンラインでの研究打ち合わせも定期的に行う。

### 4. 研究成果

(1) 臨界べきを持つ非斉次非線形シュレディンガー方程式の解の漸近挙動  
青木一貴氏、成玄隆恭氏、宮崎隼人氏、水谷治哉氏と共同で逆 2 乗べき型ポテンシャルを持つ非斉次非線形シュレディンガー方程式の終値問題の研究を行った。特筆すべき結果として、解が球対称な場合には空間 3 次元以上で修正散乱する解の存在を得ることができた。この結果は球対称性を課すと、3 次元以上の臨界な係数をもつ逆 2 乗べきポテンシャルを持つ非斉次非線形シュレディンガー方程式が 2 次元の非斉次非線形シュレディンガー方程式に変換されることから従う。高次元の場合に解の修正散乱を得ることができるモデルを見出した点が大きな成果である。この研究は星型グラフ乗での長距離散乱を扱った共同研究の継続で得られたものである。

本研究では当初、べき乗型非線形シュレディンガー方程式について空間 4 次元以上での修正散乱を 3 次元以下の場合と類似の仮定の下で示すことを目標としていたが、その解決には至らなかった。Cazenave-Naumkin の手法を検討しつつ、解の構成法をコンパクト性を用いて見直すことで解の存在だけでも示すことができないかなどを考えている。

(2) 1 次元 3 次の非線形クライン-ゴルドン方程式系の解の漸近挙動

眞崎聡氏、瀬片純市氏と共同で 1 次元 3 次の非線形クライン-ゴルドン方程式系の解の漸近挙動を考察した。方程式系が未知関数の線形変換について閉じていることに着目し、それから自然に導入される同値関係によって方程式系全体の集合を同値類で分類することに成功した。結果として、これまで解の漸近挙動が知られていない方程式系について、その解の漸近挙動を明らかにした。

(3) 1 次元 3 次の非線形シュレディンガー方程式系の解の漸近挙動

眞崎聡氏, 瀬片純市氏と共同で(2)で得た 1 次元 3 次の非線形クライン-ゴールドン方程式系に対する解の漸近挙動の分類の結果を類似の構造を持つ非線形シュレディンガー方程式系に適用した. 非線形シュレディンガー方程式系の解析の方が少し見通しが良いため, 特殊な非線形項の係数に応じて, 解の漸近挙動が修正自由解の重ね合わせになる場合と対数オーダーで減衰が遅くなる場合があることを示した. また, 北直泰氏, 眞崎聡氏, 瀬片純市氏と共同で前述の結果で扱えていない係数の条件の下, 代数オーダーで解の減衰が遅くなる解の漸近挙動があることを示した. この結果は位相の修正の係数が純虚数ではなく実数となることから現れるものであるが, 考える方程式系の第 2 成分の非線形項が第 2 成分について線形であるという構造を用いて, 減衰が遅くなる場合にも評価が閉じることを示した初めての場面となっている.

これまでの研究では代数オーダーで解の減衰が悪くなる場合というのは扱われておらず, 空間 1 次元の結果ではあるものの, 今後高次元の場合で類似の状況が起こる場合が無いか検討する価値があると考えている.

#### (4) 非局所非線形シュレディンガー方程式の解の漸近挙動

岡本葵氏と共同で非局所非線形シュレディンガー方程式の解の漸近挙動を研究した. これは空間 1 次元のモデルであるが, 原点に関して対称な点に非線形効果に加味されている. 形式的に 2 成分の 3 次の非線形シュレディンガー方程式系と見なせ, (3)で行った分類の観点からは取り扱いが難しい場合となる. 当初目標とした実係数の場合は解の漸近挙動を導出することができなかったが, 消散構造をもつ係数の場合に解の漸近挙動を得た. 実係数の場合は(3)の研究とも関連し, 今後の課題である. 岡本氏とはさらに微分形非線形項をもつ 4 階シュレディンガー方程式の解の漸近挙動についても研究を行った.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Mamoru Okamoto, Kota Uriya	4. 巻 21
2. 論文標題 Long-time behavior of solutions to a fourth-order nonlinear Schroedinger equation with critical nonlinearity	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 4897--4929
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00028-021-00737-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Masaki Satoshi, Segata Jun-ichi, Uriya Kota	4. 巻 139
2. 論文標題 Long range scattering for the complex-valued Klein-Gordon equation with quadratic nonlinearity in two dimensions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal de Mathe'matiques Pures et Applique'es	6. 最初と最後の頁 177 ~ 203
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.matpur.2020.03.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Okamoto Mamoru, Uriya Kota	4. 巻 11
2. 論文標題 Final state problem for the nonlocal nonlinear Schroedinger equation with dissipative nonlinearity	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Differential Equations & Applications	6. 最初と最後の頁 481 ~ 494
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.7153/dea-2019-11-23	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Masaki Satoshi, Segata Jun-ichi, Uriya Kota	4. 巻 9
2. 論文標題 On asymptotic behavior of solutions to cubic nonlinear Klein-Gordon systems in one space dimension	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society, Series B	6. 最初と最後の頁 517 ~ 563
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/btran/116	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Aoki Kazuki, Inui Takahisa, Miyazaki Hayato, Mizutani Haruya, Uriya Kota	4. 巻 4
2. 論文標題 Asymptotic behavior for the long-range nonlinear Schroedinger equation on the star graph with the Kirchhoff boundary condition	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Pure and Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 287 ~ 311
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/paa.2022.4.287	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kita Naoyasu, Masaki Satoshi, Segata Jun-ichi, Uriya Kota	4. 巻 230
2. 論文標題 Polynomial deceleration for a system of cubic nonlinear Schroedinger equations in one space dimension	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 113216 ~ 113216
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2023.113216	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 Kota Uriya
2. 発表標題 1次元3次の非線形Klein-Gordon方程式系の解の漸近挙動
3. 学会等名 鳥取PDE研究集会2021 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kota Uriya
2. 発表標題 1次元3次の非線形Schroedinger方程式系の解の漸近挙動
3. 学会等名 熊本大学応用解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kota Uriya
2. 発表標題 Asymptotic behavior of the solution to cubic nonlinear Klein-Gordon systems in one dimension
3. 学会等名 第189回愛媛大学解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kota Uriya
2. 発表標題 Final state problem for a nonlocal nonlinear Schroedinger equation
3. 学会等名 RIMS共同研究(グループ型)「線形および非線形分散型方程式の研究」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kota Uriya
2. 発表標題 Final state problem for a nonlocal nonlinear Schroedinger equation
3. 学会等名 福島発展方程式討論会2019(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Mamoru Okamoto, Kota Uriya
2. 発表標題 非局所非線形Schroedinger方程式に対する終値問題
3. 学会等名 日本数学会 2019年度秋期総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kota Uriya
2. 発表標題 Final state problem for a nonlocal nonlinear Schroedinger equation
3. 学会等名 Workshop on nonlinear wave equations and related topics in Kobe (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kota Uriya
2. 発表標題 Final state problem for a nonlocal nonlinear Schroedinger equation
3. 学会等名 大阪大学微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kota Uriya
2. 発表標題 Final state problem for a nonlocal nonlinear Schroedinger equation
3. 学会等名 微分方程式の総合的研究 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kota Uriya
2. 発表標題 Long range scattering for the nonlinear Schroedinger equation in higher dimensions
3. 学会等名 津田塾大学PDE研究会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kota Uriya
2. 発表標題 Asymptotic behavior of the solution to a system of cubic nonlinear Schroedinger equations in one dimension
3. 学会等名 大阪大学微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kota Uriya
2. 発表標題 Asymptotic behavior of the solution to a system of cubic nonlinear Schroedinger equations in one dimension
3. 学会等名 Critical Exponent and Nonlinear Partial Differential Equations 2023 (招待講演)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

個人ホームページ <a href="https://www.xmath.ous.ac.jp/~uriya/">https://www.xmath.ous.ac.jp/~uriya/</a>
---

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件



8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------