

令和 6 年 6 月 3 日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14590

研究課題名（和文）滑らかな領域における非線形偏微分方程式に対する有限要素法

研究課題名（英文）Finite element methods for nonlinear partial differential equations on curved domains

研究代表者

剣持 智哉（Kemmochi, Tomoya）

名古屋大学・工学研究科・助教

研究者番号：80824664

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：滑らかな境界を持つ偏微分方程式に対する有限要素法、およびそれに関連する話題に対して、さまざまな観点から数学的な解析を行った。特に、楕円型・放物型偏微分方程式に対して、最大値ノルムによる解析や、時間変数に対する不連続Galerkin法の解析など、多くの重要な成果を得た。また、時間発展する曲線に対する数値解法の研究と応用研究も行い、いくつかの成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

有限要素法はその柔軟性や数学的な明快さから、シミュレーション分野で広く用いられている数値解法である。有限要素法に対する数学的な解析は、シミュレーションの妥当性を数学的に保証するために重要な研究である。本研究成果は特に、現実問題のシミュレーションの問題設定として現れうる問題を考えているため、シミュレーション分野において重要な役割を果たしている。

研究成果の概要（英文）：I investigated the finite element method for partial differential equations with smooth boundaries and related topics from various viewpoints. In particular, I obtained many important results for elliptic and parabolic partial differential equations, such as the maximum norm estimates and the discontinuous Galerkin time-stepping method. In addition, I studied numerical methods for solving time-evolving curves and I applied them to mathematical analysis of a minimizing problem for curves.

研究分野：数値解析学

キーワード：有限要素法 偏微分方程式 数値解法 誤差評価 不連続Galerkin時間離散化法

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

有限要素法とは偏微分方程式に対する数値解析の 1 つであり、その柔軟性や数学的明快さから、シミュレーション分野で広く用いられている。数値解法に対する誤差評価などの数学的解析は、シミュレーション結果の妥当性を数学的に保証することに繋がる重要な課題である。

数値シミュレーションでの問題設定として、考える領域の境界が滑らかであるということがしばしば仮定される。例えば、飛行機の翼周りや自動車の胴体周りの空気の流れをシミュレートする際には、境界が滑らかになる、このような状況下での有限要素法は昔からあるものの、誤差評価で用いられるノルムとしては L^2 ノルムや H^1 ノルムなどの標準的なノルムばかりが考えられてきた。しかしながら、非線形偏微分方程式への応用を考えると、そのようなノルムだけでは心許ないが、 L^p ノルムに代表されるような他のノルムでの誤差評価はほとんど考えられてこなかった (図 1)。

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} & \|u\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx \right)^{1/2} \\ \|u\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} & \|u\|_{L^\infty(\Omega)} &= \max_{x \in \Omega} |u(x)| \end{aligned}$$

図 1: L^2 ノルム (左上), H^1 ノルム (右上), L^p ノルム (左下), 最大値ノルム (右下)

2. 研究の目的

上のような状況を踏まえ、本研究では、滑らかな境界を持つ領域上の偏微分方程式に対する有限要素法に関して、さまざまなノルムにより誤差評価などの数学的解析を行うことを目的とした。非線形偏微分方程式への応用を念頭に置いて、線形問題に対するアприオリ評価などの基礎的な評価を得ることも目的とした。

3. 研究の方法

まずは、線形の楕円型および放物型偏微分方程式に対する、最大値ノルムによる誤差評価や、最大 $L^p L^q$ 正則性の評価などを検討した (図 2)。その後、非線形偏微分方程式の誤差評価を念頭に置き、非線形偏微分方程式に対する数値解法の開発と解析を行った。また、開発した数値解法を用いて実際にシミュレーションを行い、数学的な問題の考察に応用した。さらに、不連続 Galerkin 法による時間離散化法に対しても、同様に最大正則性の評価などの解析を行った。Stokes 方程式に対しても同様の考察を行った (図 3)。

$$\|\partial_t u\|_{L^p(0,T;L^q(\Omega))} + \|\Delta u\|_{L^p(0,T;L^q(\Omega))} \leq C \|f\|_{L^p(0,T;L^q(\Omega))}$$

図 2: 放物型偏微分方程式に対する最大正則性

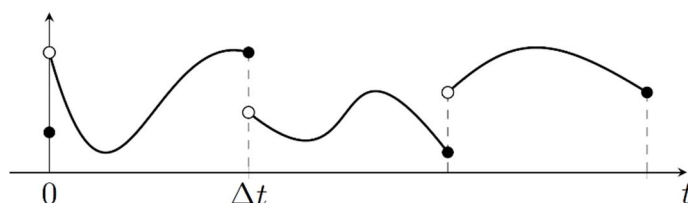


図 3: 不連続 Galerkin 時間離散化法の概念図

4. 研究成果

線形の楕円型・放物型方程式に対する誤差評価や最大正則性などのアприオリ評価を得ることに成功した。この成果は論文誌 Numer. Math. と Math. Comp. に掲載された。

非線形偏微分方程式に対する数値解法として、Scalar auxiliary variable (SAV) 法と呼ばれる、方程式のエネルギー構造を保存する数値解法を対象とし、さまざまな範囲の偏微分方程式へ適用できるように拡張した (図 4)。また、同じくエネルギー構造を持つ方程式として、平面曲線に対する勾配流方程式を考えた。制約付きの勾配流に対して、エネルギー散逸構造と制約条件の両方を保存する数値解法を考案した (図 5)。前者の成果は論文誌 BIT に掲載されている。後者の成果のうち、1 つは論文誌 Commun. Math. Res. に掲載され、もう 1 つは論文投稿中である。

平面曲線に対する数値解法を利用して、平面曲線の勾配流に関するある数学的な予想に関して考察を行った。数学的には証明できていないものの、予想がある意味で成り立たないような数値例を得ることに成功した。この成果は論文誌 J. Math. Pures Appl. に掲載された (図 6)。

不連続 Galerkin 法と呼ばれる方法によって微分方程式の時間変数を離散化する手法に対して、離散版の最大正則性の評価を示し、その成果を放物型方程式に対する数値解法の誤差評価へ応用することに成功した。この成果は論文誌 SIAM J. Numer. Anal. に受理された。

Stokes 方程式に対する L_p 評価についても検討したが、これについては適切な成果を得ることはできなかった。また、非線形偏微分方程式に対する有限要素法の数学的な解析までは至らなかった。これらの点については今後の課題である。

しかしながら、後者に関しては、代表者は以前から非線形偏微分方程式に対する数値解析の研究を行っているまた、研究期間内に得られた成果自体、非線形偏微分方程式への応用を意識して研究した成果である。したがって、すでに得られている知見を援用することで、滑らかな境界を持つ非線形偏微分方程式に対する数値解析の研究が実現可能であると考えられる。

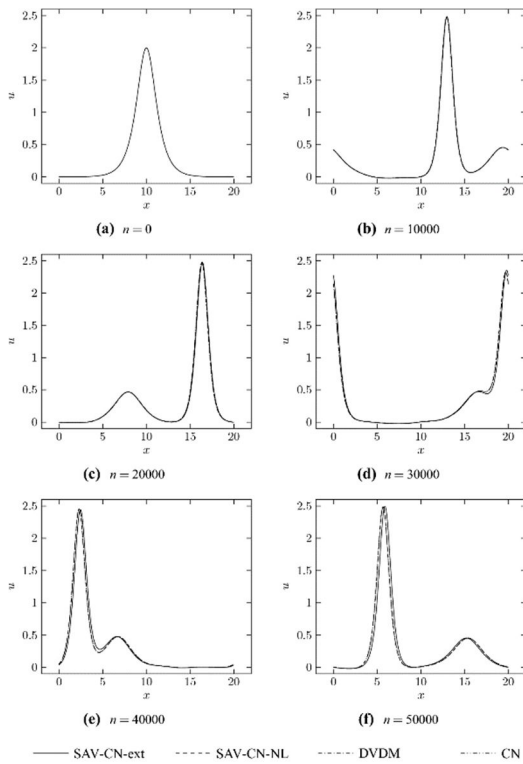


図 4: SAV 法による数値計算結果

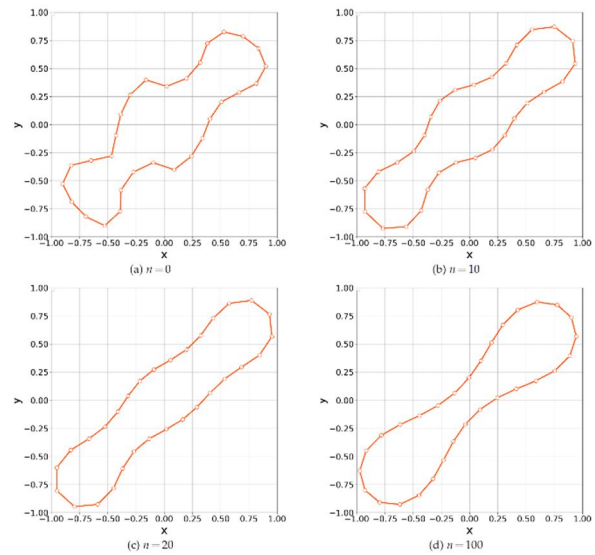


図 5: 制約付き勾配流の数値計算結果

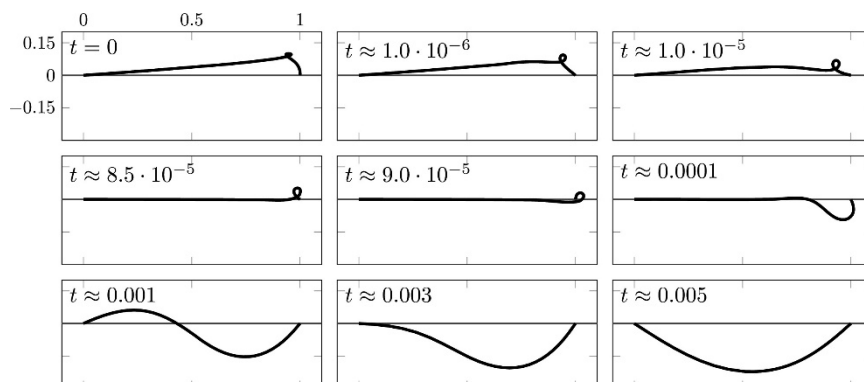


図 6: 考案した数値解法による、数学的に意味のある数値計算結果

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計14件（うち査読付論文 14件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Miyazaki Eiji, Kemmochi Tomoya, null Tomohiro Sogabe, Zhang Shao-Liang	4. 巻 39
2. 論文標題 A Structure-Preserving Numerical Method for the Fourth-Order Geometric Evolution Equations for Planar Curves	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Research	6. 最初と最後の頁 296 ~ 330
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4208/cmr.2022-0040	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Tatsuoka Fuminori, Sogabe Tomohiro, Miyatake Yuto, Kemmochi Tomoya, Zhang Shao-Liang	4. 巻 54
2. 論文標題 Computing the matrix fractional power with the double exponential formula	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 ETNA - Electronic Transactions on Numerical Analysis	6. 最初と最後の頁 558 ~ 580
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1553/etna_vol154s558	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kemmochi Tomoya, Sato Shun	4. 巻 -
2. 論文標題 Scalar auxiliary variable approach for conservative/dissipative partial differential equations with unbounded energy functionals	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 BIT Numerical Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10543-021-00904-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Satake Yuki, Sogabe Tomohiro, Kemmochi Tomoya, Zhang Shao-Liang	4. 巻 -
2. 論文標題 On a transformation of the γ -congruence Sylvester equation for the least squares optimization	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Optimization Methods and Software	6. 最初と最後の頁 1 ~ 8
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/10556788.2020.1734004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kashiwabara Takahito, Kemmochi Tomoya	4. 巻 89
2. 論文標題 Stability, analyticity, and maximal regularity for parabolic finite element problems on smooth domains	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematics of Computation	6. 最初と最後の頁 1647 ~ 1679
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/mcom/3500	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kashiwabara Takahito, Kemmochi Tomoya	4. 巻 144
2. 論文標題 Pointwise error estimates of linear finite element method for Neumann boundary value problems in a smooth domain	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Numerische Mathematik	6. 最初と最後の頁 553 ~ 584
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00211-019-01098-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakano Kosuke, Kemmochi Tomoya, Miyatake Yuto, Sogabe Tomohiro, Zhang Shao-Liang	4. 巻 11
2. 論文標題 Modified Strang splitting for semilinear parabolic problems	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 77 ~ 80
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14495/jsiaml.11.77	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tomoya Kemmochi	4. 巻 39
2. 論文標題 Numerical Analysis of the Allen-Cahn Equation with Coarse Meshes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Math. Res. Appl.	6. 最初と最後の頁 709~717
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3770/j.issn:2095-2651.2019.06.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Satake Yuki, Oozawa Masaya, Sogabe Tomohiro, Miyatake Yuto, Kemmochi Tomoya, Zhang Shao-Liang	4. 巻 96
2. 論文標題 Relation between the T-congruence Sylvester equation and the generalized Sylvester equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Applied Mathematics Letters	6. 最初と最後の頁 7 ~ 13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aml.2019.04.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Niu Jing, Sogabe Tomohiro, Du Lei, Kemmochi Tomoya, Zhang Shao-Liang	4. 巻 457
2. 論文標題 Tensor product-type methods for solving Sylvester tensor equations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Applied Mathematics and Computation	6. 最初と最後の頁 128155 ~ 128155
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.amc.2023.128155	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kemmochi Tomoya, Miura Tatsuya	4. 巻 185
2. 論文標題 Migrating elastic flows	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal de Mathematiques Pures et Appliquees	6. 最初と最後の頁 47 ~ 62
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.matpur.2024.02.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Niu Jing, Sogabe Tomohiro, Du Lei, Kemmochi Tomoya, Zhang Shao-Liang	4. 巻 457
2. 論文標題 Tensor product-type methods for solving Sylvester tensor equations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Applied Mathematics and Computation	6. 最初と最後の頁 128155 ~ 128155
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.amc.2023.128155	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuki Satake, Tomohiro Sogabe, Tomoya Kemmochi, and Shao-Liang Zhang.	4. 巻 -
2. 論文標題 Matrix equation representation of the convolution equation and its unique solvability.	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Special Matrices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahito Kashiwabara and Tomoya Kemmochi.	4. 巻 -
2. 論文標題 Discrete maximal regularity for the discontinuous Galerkin time-stepping method without logarithmic factor.	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Numerical Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計22件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 劔持智哉
2. 発表標題 Stokes作用素の有限要素近似に対する L^p リゾルベント評価
3. 学会等名 名古屋微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 劔持智哉
2. 発表標題 Stokes作用素の有限要素近似に対する L^p リゾルベント評価
3. 学会等名 日本応用数理学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 劔持智哉
2. 発表標題 偏微分方程式に対する有限要素法の L^p 理論
3. 学会等名 第3回若手研究交流会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 劔持智哉
2. 発表標題 Stokes作用素の有限要素近似に対する L^p リゾルベント評価
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 劔持智哉
2. 発表標題 Stokes作用素の有限要素近似に対する L^p リゾルベント評価
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）「数値解析が拓く次世代情報社会～エッジから富岳まで～」（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Tomoya Kemmochi
2. 発表標題 Higher-order discrete gradient methods by discontinuous Galerkin time-stepping methods
3. 学会等名 JSPS seminar: Topics in computational methods for stochastic and deterministic differential equations（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Tomoya Kemmochi
2. 発表標題 \$L^p\$-resolvent estimate for finite element approximation of the Stokes operator
3. 学会等名 基礎論壇（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 劔持智哉
2. 発表標題 Stokes作用素の有限要素近似に対する離散最大正則性
3. 学会等名 2022年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 劔持智哉
2. 発表標題 Stokes作用素の有限要素近似に対する離散最大正則性
3. 学会等名 日本応用数理学会 第19回 研究部会連合発表会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 劔持智哉
2. 発表標題 Cahn-Hilliard方程式に対して構造保存解法とアダプティブ有限要素法を両立させたい
3. 学会等名 第2回若手研究交流会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 劔持智哉
2. 発表標題 不連続Galerkin時間離散化手法による離散勾配法の高精度化
3. 学会等名 応用数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 劔持智哉
2. 発表標題 不連続Galerkin時間離散化手法による離散勾配法の高精度化
3. 学会等名 第83回 京大応用数学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 劔持智哉
2. 発表標題 平面曲線の制約条件付き勾配流に対する構造保存数値解法
3. 学会等名 数値解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tomoya Kemmochi
2. 発表標題 Structure-preserving numerical methods for constrained gradient flows of planar curves
3. 学会等名 ZOOM online colloquium at Department of Applied Mathematics, The Hong Kong Polytechnic University（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 劔持智哉
2. 発表標題 重調和方程式に対するCO内部ペナルティ法の解析
3. 学会等名 若手応用数学研究会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 劔持智哉
2. 発表標題 Scalar auxiliary variable approach の紹介とその拡張
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）諸科学分野を結ぶ基礎学問としての数値解析学（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 劔持智哉
2. 発表標題 Hamilton 系に対する SAV 法
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋期総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 劔持智哉
2. 発表標題 Hamilton 系に対する SAV 法
3. 学会等名 日本応用数理学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomoya Kemmochi
2. 発表標題 Structure-preserving numerical scheme for the area-preserving curve shortening flow
3. 学会等名 The 9th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomoya Kemmochi and Takahito Kashiwabara
2. 発表標題 Maximum norm error estimates for linear finite element semi-discretization of parabolic problems on smooth domains
3. 学会等名 Conference on Mathematical (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 劔持智哉
2. 発表標題 Hamilton 系に対する SAV 法
3. 学会等名 第48回数値解析シンポジウム (NAS2019)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomoya Kemmochi
2. 発表標題 Structure-preserving numerical methods for constrained gradient flows of planar closed curves with explicit tangential velocities
3. 学会等名 ICIAM2023 (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------