

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 6 月 11 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2020

課題番号：19K14606

研究課題名（和文）揺らぎと時間発展の観点から見た弱値の物理量としてのダイナミクスの解明

研究課題名（英文）Elucidation of dynamics of weak values as physical quantities from the viewpoint of fluctuation and time evolution

研究代表者

小川 和久 (Ogawa, Kazuhisa)

北海道大学・情報科学研究院・助教

研究者番号：80772574

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：事前選択量子系に対する物理量の分散は間接測定でのプローブ波束幅の増加として現れる。我々はこの枠組を事前・事後選択系に拡張し、「弱分散」と呼ばれる分散の複素数値の対応物を定式化した。この定式化では、弱分散の実部と虚部は、直交位相平面上でそれぞれ垂直-水平方向と対角-反対角方向のプローブ波束幅の変化として現れる。我々は光学系を使用してプローブ波束幅のこれらの変化を実験的に検証した。さらに弱分散は、事前・事後選択系における弱値確率分布の分散として表せることを示した。これらの操作的・統計的解釈により、我々の弱分散の定式化は事前・事後選択系の分散の複素対応物として合理的であることが支持される。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子系に対する測定結果は一般的に確率的に揺らぎ、これは古典力学には見られない量子に本質的な性質である。本研究はこの量子系に対する測定に伴う揺らぎの概念を精緻化・一般化したものである。つまり、事前・事後選択した量子系には本来的に複素数で表される揺らぎ（弱分散）が備わっており、事後選択しない場合はそれらの確率混合として通常の非負の分散が現れる。そしてそのような複素数の揺らぎは、実験的にも観測できたことから、現実的に利用可能な量であることが示された。本研究により、事前・事後選択が関係する量子パラドックスの解決に重要な知見を与え、また逆に弱分散の制御によって波動関数を成形する新たな手段が与えられる。

研究成果の概要（英文）：The variance of an observable in a pre-selected quantum system appears as an increase in the probe wave packet width in indirect measurements. Extending this framework to pre- and post-selected systems, we formulate a complex-valued counterpart of the variance called "weak variance." In our formulation, the real and imaginary parts of the weak variance appear as changes in the probe wave packet width in the vertical-horizontal and diagonal-antidiagonal directions, respectively, on the quadrature phase plane. Using an optical system, we experimentally demonstrate these changes in the probe wave packet width. Furthermore, we show that the weak variance can be expressed as the variance of the weak-valued probability distribution in pre- and post-selected systems. These operational and statistical interpretations support the rationality of formulating the weak variance as a complex counterpart of the variance in pre- and post-selected systems.

研究分野：量子光学、量子情報

キーワード：弱測定 弱値

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 物理系のある特性を表すスカラー量である物理量という概念は、古典論と量子論では揺らぎと時間発展に関して大きな違いがある。古典論においては、いかなる物理量も確定した値を持ち、ハミルトン方程式に従って決定論的に時間発展する。一方量子論では、物理量の測定値には確率的揺らぎがあり、状態 $|\psi\rangle$ に対する物理量演算子 $\hat{A}$ の測定では、測定値として $\hat{A}$ の固有値が確率的に得られる(図1(a))。異なる2つの物理量間の揺らぎの大きさの関係は不確定性関係で定式化される。そして得られた測定値の統計平均である期待値 $\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ が、量子系における古典物理量に対応するスカラー量として与えられる。時間発展に関しては、期待値のみの時間発展であればエーレンフェストの定理によりハミルトン方程式に似た式に従うが、期待値だけでなく揺らぎの発展も完全に記述するためには、(ハイゼンベルク描像では)物理量演算子 $\hat{A}$ の微分方程式であるハイゼンベルク方程式(または状態 $|\psi\rangle$ の微分方程式であるシュレディンガー方程式)を考慮する必要がある。

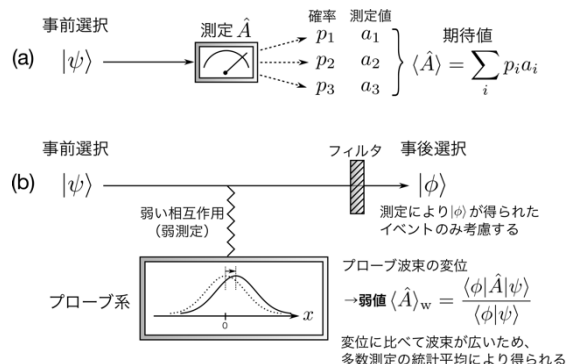


図 1: (a)事前選択のみの量子系の測定。(b)事前・事後選択系に対する弱測定。

決定論的な時間発展をする古典系とは異なり、量子系では測定結果が確率的に揺らぐため、測定結果から逆に測定前の状態を決定することはできない。しかし図1(b)のように測定結果を1つに固定(事後選択)することで、時間反転対称な量子力学形式を構築できることが知られている[1]。この形式では、量子系は事前・事後選択状態のペア $\{|\psi\rangle, |\phi\rangle\}$ (またはそれらを組み合わせさせた演算子 $|\psi\rangle\langle\phi|$ )で特徴付けられ、そのように事前・事後選択されたアンサンブルは、物理量演算子 $\hat{A}$ に対して弱値 $\langle\hat{A}\rangle_w = \langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle / \langle\phi|\psi\rangle$ という複素数値を特徴量として持つ[2]。弱値は弱測定と呼ばれる測定法で実験的に観測することができる[2]。弱測定は被測定系を乱さない程度にプローブ系を弱く相互作用させて測定する手法で、相互作用が弱くプローブ波束の変位がその波束の広がり比べて十分小さいため、プローブ系に対する多数測定の統計平均によって弱値が測定される。弱値・弱測定はこれまでに、(i)測定前の物理量を問う量子論の基礎的問題へのアプローチ[3-5]、(ii)弱い相互作用の高感度計測[6,7]、(iii)量子状態の波動関数や擬確率分布の直接測定[8,9]など、量子論基礎から量子情報技術に関わる応用まで幅広くその価値が見出されてきた。

(2) (i)の研究では、測定前の量子系を問うという、これまでは測定による擾乱のため知ることができないとされていた問題に対して、弱測定を利用するというアプローチが取られた：つまり、弱測定によって量子系をほとんど乱すことなく得られた弱値が、測定前の量子系が持っていた物理量に準ずる値として扱われた。しかし、一般に弱値は物理量演算子の固有値の範囲を超えた複素数をとるため、弱値は「古典物理量」とも「量子系において統計平均(期待値)として測定される物理量」とも異なる、事前・事後選択系が備える全く別の種類の物理量であることを認めなければならない。それならば、古典系、事前選択された量子系と同様に、事前・事後選択系における物理量(弱値)についても、揺らぎや時間発展に関する独自の性質を定式化できるはずであるが、応募者が知る限りはこの方向性での研究はなされていない。「弱値は事前・事後選択系の物理量としてどのように振る舞うのか?」これが本研究課題の問いである。

## 2. 研究の目的

本研究では、揺らぎと時間発展の観点から弱値の性質を明らかにすることで、事前・事後選択された量子系について、状態ベクトルや演算子を用いずに、弱値のみでそのダイナミクスを記述する描像を構築することを目的とした。

物理学一般において、測定揺らぎには系を理解する手がかりが含まれていることが多く[10]、弱値についても揺らぎから物理量としての性質を特徴付けることができると考えられる。しかし、弱測定では元々のプローブ波束の大きさに起因する測定揺らぎが支配的であるため、弱値そのものの揺らぎは陽には現れず、そのために明確な弱値の揺らぎの定義は知られていない。したがって、まず弱値の揺らぎを顕在化する手法を考案することで操作論的に弱値の揺らぎの

定義付けを行う。そして揺らぎがあるならば、異なる物理量の弱値間の揺らぎが満たすと考えられる不確定性関係を定式化する。その上で、古典物理量や量子的な物理量演算子の時間発展がそれぞれハミルトン方程式、ハイゼンベルク方程式で表せるように(図2(a), (b)), 弱値とその揺らぎが従う時間発展方程式を導出する(図2(c))。そして以上の弱値の揺らぎの測定, 不確定性関係の検証, 時間発展の検証を, 伝令付き単一光子源を用いた光学実験により実現する。

### 3. 研究の方法

(1) まず弱値の揺らぎを, その測定法を提示することで操作論的に定義する。従来の弱測定(図3(d))では, 大きなプローブ波束由来の測定揺らぎが大きく, 弱値の揺らぎは微小(相互作用の大きさ $\theta$ の2次の項)であるとして考慮されてこなかった。そこで我々は $\theta$ の2次の影響まで考慮し, その際に生じるプローブ波束幅の変化より, 弱値の揺らぎ(弱分散)を定義する(図3(e))。

また, 弱分散は弱値と同様, 複素数である可能性が考えられる。その場合, 弱分散の虚部にはどんな物理的意味があるのかを明らかにする。

(2) 実際に弱測定系においてプローブ波束幅の変化に弱分散が現れることを, 光学系を用いて実験検証する。レーザから出射されるビームの横方向分布をプローブとし, 偏光を事前・事後選択する。ビームの横方向自由度と偏光自由度の間に複屈折結晶による相互作用があると, そこから定義される弱値の分だけビームの横方向分布がシフトすることが弱測定理論からわかっている。我々はさらにビームの横方向分布の幅の変化に着目し, そこに理論的に予測した弱分散が現れていることを確かめる。

(3) 上で定義した弱分散の形が, 事前・事後選択系における物理量の揺らぎの形式として適切かどうかを検討する。つまり, 通常期待値や分散が確率分布に対する1次, 2次モーメントでそれぞれ表されるのと同様に, 弱値や弱分散が何らかの統計的な概念で統一的に理解できないかを検討する。

### 4. 研究成果

(1) 始状態, 終状態のプローブ波束の分散をそれぞれ $\sigma_i^2(X)$ ,  $\sigma_f^2(X)$ とすると, それらの差分は $\sigma_f^2(X) - \sigma_i^2(X) = (\theta^2/2)\text{Re}\sigma_w^2(\hat{A}) + O(\theta^3)$ と求められる。ここで $\sigma_w^2(\hat{A}) := \langle \hat{A}^2 \rangle_w - \langle \hat{A} \rangle_w^2$ を弱分散として定義した。事後選択がない場合はプローブ波束幅の変化には $\hat{A}$ の分散 $\sigma^2(\hat{A})$ が現れることから, 弱分散 $\sigma_w^2(\hat{A})$ は分散の事前・事後選択系における対応物であると捉えることができる。

通常分散は正の実数であるのと対照的に, 弱分散は一般に複素数値をとる。上の議論から, 弱分散の実部はプローブ波束の増加量に対応するが, 弱分散の実部が負の数である場合は, プローブ波束幅が減少する。このようにシステムの「負の分散」とも呼べる量は, プローブ波束幅の減少量を通じて現れることがわかった。

さらに弱分散の虚部は, プローブ波束の波動関数を直交位相平面上で表現するとよく理解できる(図4)。つまり, 弱分散の実部は直交位相平面上では縦横方向の伸び縮みの大きさに対応し, 虚部は斜め45°方向の伸び縮みの大きさに対応することがわかった。このように, シス

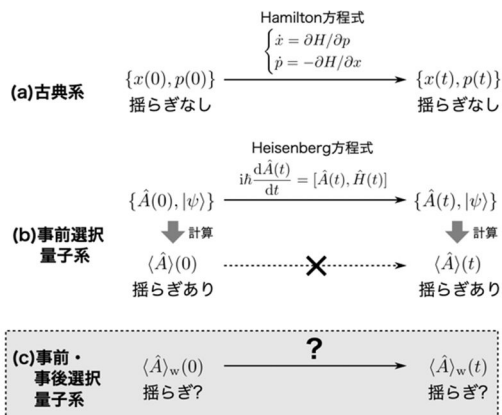


図 2: (a) 古典系における物理量のダイナミクス。(b) 事前選択のみの量子系におけるダイナミクス。揺らぎと期待値の時間発展を同時に追うには, 一旦演算子の時間発展を考える必要がある。(c) 本研究で考える, 事前・事後選択された量子系における弱値のダイナミクス。

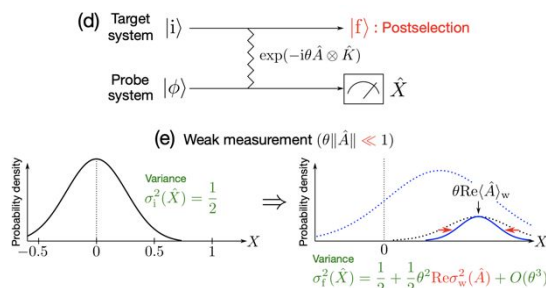


図 3: (d) 弱測定の量子回路表現。(e) 弱測定におけるプローブ波束の変化。 $\theta$ の2次の影響まで考慮すると, 波束幅に変化が生じている。

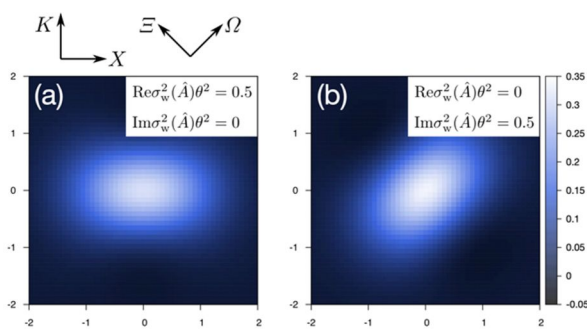


図 4: (a) 弱分散が正の実数の場合の, プローブ波動関数の直交位相平面上での変化。(b) 弱分散が正の純虚数の場合。



テムの「複素数の分散」とも呼べる量は、やはりプローブ波束幅の直交位相平面上での変化を通じて現れることがわかった。

(2) 図5の光学系を用いて、弱測定系に現れる弱分散の観測を行なった。対象系はビームの偏光自由度とし、グラントムソプリズム、半波長板、及び1/4波長板を用いて、弱分散が(i)負の実数、(ii)正の純虚数となるようにそれぞれ事前・事後選択した。プローブ系はビームの横分布とし、直交貼り合わせBB0結晶を用いて偏光-横分布の相互作用を構成した。ビームの横分布はCCDカメラを用いて測定された。位置基底 $X$ 以外の基底における測定は、レンズと自由伝搬を組み合わせてビームを(分数)フーリエ変換してからCCDカメラで撮影することにより実現した。

測定結果を図6に示す。(i)弱分散が負の実数となるように選んだ場合、 $X$ 基底では波束幅が減少し、それに伴って $K$ 基底では波束幅が増加した。一方で $\Omega$ ,  $\Xi$ 基底では波束幅に変化はほぼ無かった。これは直交位相平面上で波束が横方向に縮み縦方向に広がっていることに対応し、実験結果は理論曲線によく一致した。(ii)弱分散が正の純虚数と選んだ場合は、 $\Omega$ 基底では波束幅が増加し、それに伴って $\Xi$ 基底では波束幅が減少した。一方で $X$ ,  $K$ 基底では波束幅に変化はほぼ無かった。これは直交位相平面上で波束が斜め方向に伸び縮みしていることに対応し、こちらも実験結果は理論曲線によく一致した。以上のように、事前・事後選択系を持つ複素数の弱分散を観測することに成功した。

(3) 弱分散が上記のように弱測定系におけるプローブ波束の変化量から操作論的に定義されたが、統計的には以下のように解釈できることがわかった。事前選択状態 $|\psi\rangle$ に対する $\hat{A}$ の測定結果が確率的に分布するのに対応して、事前・事後選択に対する測定結果は、 $\hat{A}$ の固有空間への射影演算子の弱値を弱値確率と定義し、それぞれの確率変数として $\hat{A}$ の固有値が割り当てられる。 $\hat{A}$ の期待値、分散はそれぞれ確率分布における1次モーメント、2次モーメントに対応するが、同じように $\hat{A}$ の弱値、弱分散はそれぞれ弱値確率分布の1次モーメント、2次モーメントで形式的に表せる(図7)。この考え方を拡張すると高次モーメントに対応して、事前・事後選択系における高次弱モーメントも新たに定義することができる。

上記の結果はこれまで知られていなかった事前・事後選択系における揺らぎの性質を定式化したものであり、事前・事後選択系における揺らぎに関する量子論基礎の問題に対して有用な知見を与えることが期待される。またここで考えた系は事前・事後選択による波形の成形手法の指針を与えるものであり、特に光の直交位相振幅の成形に利用できることが期待される。本結果はPhysical Review Researchに投稿中であり、プレプリントはarXivサーバにアップロードされている[11]。

当初は事前・事後選択系には揺らぎがないと予想しており、したがってハミルトン方程式のように確定的なダイナミクスの記述を目指していた。しかしながら予想に反して、事前・事後

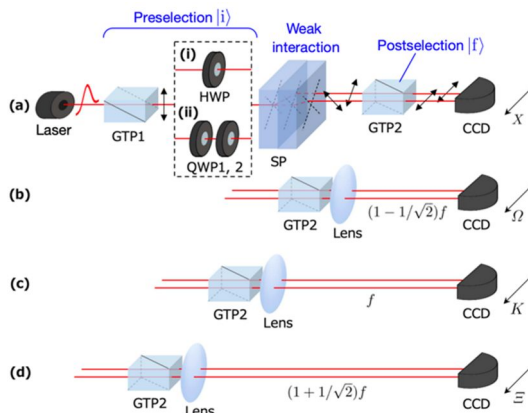


図5: 弱分散を観測するための光学実験系。(a), (b), (c), (d)はそれぞれ基底 $X$ ,  $\Omega$ ,  $K$ ,  $\Xi$ におけるプローブ波束幅観測のための光学系。

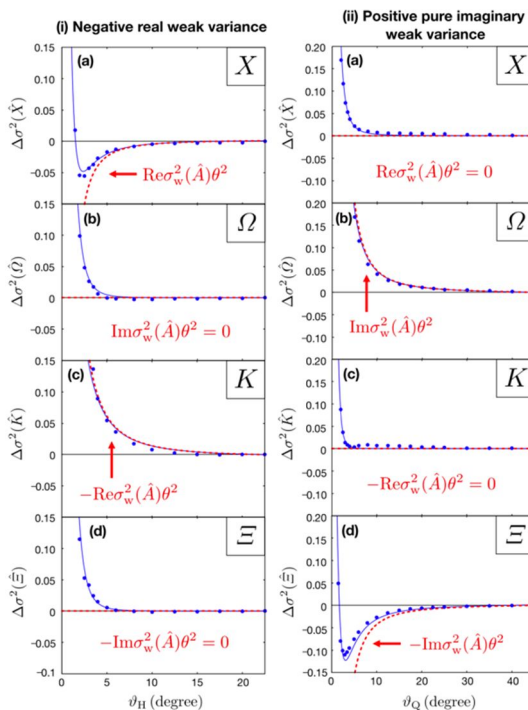


図6: 弱分散の観測結果。(i), (ii)はそれぞれ弱分散が負の実数の場合と正の純虚数の場合である。弱分散が実数の時は $X$ ,  $K$ の基底において波束幅の増減が見られ、弱分散が純虚数の場合は $\Omega$ ,  $\Xi$ の基底において波束幅の増減が見られた。

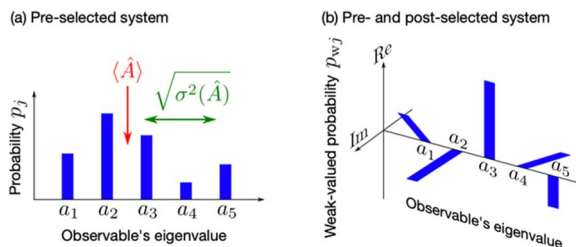


図7: 弱分散の統計的解釈。(a)事前選択のみの場合の射影測定結果の確率分布。(b)事前・事後選択を行なった場合の弱値確率分布。

プレプリントはarXivサーバにアップロードされ

選択系における揺らぎが定式化できたため、その観測と物理的解釈を探る方向に方針転換した。したがって当初予定していた、弱値を元にした量子系のダイナミクスの定式化は達成できなかった。また、弱分散に関する不確定性関係の導出を検討したが、未証明である。

#### 参考文献

- [1] Y. Aharonov *et al.*, Phys. Rev. B **134**, 1410 (1964).
- [2] Y. Aharonov *et al.*, Phys. Rev. Lett. **60**, 1351 (1988).
- [3] K. J. Resch *et al.*, Phys. Lett. A **324**, 125 (2004).
- [4] K. Yokota *et al.*, New J. Phys. **11**, 033011 (2009).
- [5] S. Kocsis *et al.*, Science **332**, **1170** (2011).
- [6] O. Hosten and P. Kwiat, Science **319**, 787 (2008).
- [7] P. B. Dixon *et al.*, Phys. Rev. Lett. **102**, 173601 (2009).
- [8] J. S. Lundeen *et al.*, Nature **474**, 188 (2011).
- [9] C. Bamber *et al.*, Phys. Rev. Lett. **112**, 070405 (2014).
- [10] R. Landauer, Nature **392**, 658 (1998).
- [11] K. Ogawa *et al.*, arXiv:2102.06561.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 3件）

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Kazuhiisa Ogawa   |
| 2. 発表標題<br>Operational formulation of weak values as sensitivity of post-selection probability amplitude to small transformation |
| 3. 学会等名<br>Workshop on Quantum Foundations: Measurement & Entanglement (招待講演) (国際学会)   |
| 4. 発表年<br>2020年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Kazuhiisa Ogawa, Hirokazu Kobayashi, Akihisa Tomita                            |
| 2. 発表標題<br>Direct measurement method of weak values without using probes                  |
| 3. 学会等名<br>Conference on Quantum Information and Quantum Control-VIII (CQIQC-VIII) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Kazuhiisa Ogawa, Hirokazu Kobayashi, Akihisa Tomita  |
| 2. 発表標題<br>Diagrammatic representation of direct measurement systems of quantum states, processes, and measurements |
| 3. 学会等名<br>Rochester Conference on Coherence and Quantum Optics (CQO-11) (国際学会)                                     |
| 4. 発表年<br>2019年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>阿部 夏来, 小川 和久, 富田 章久             |
| 2. 発表標題<br>事前・事後選択系における物理量の揺らぎの定式化とその実験的検証 |
| 3. 学会等名<br>量子論の諸問題と今後の展開(QMKEK7)           |
| 4. 発表年<br>2020年                            |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>小川 和久, 阿部 夏来, 小林 弘和, 富田 章久     |
| 2. 発表標題<br>事前・事後選択された弱測定系に現れる複素数値「分散」の定式化 |
| 3. 学会等名<br>日本物理学会第76回年次大会                 |
| 4. 発表年<br>2021年                           |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>阿部夏来・小川和久・小林弘和・富田章久             |
| 2. 発表標題<br>事前・事後選択系における物理量の複素揺らぎの定式化と実験的検証 |
| 3. 学会等名<br>第43回量子情報技術研究会 (QIT43)           |
| 4. 発表年<br>2020年                            |

|                                     |
|-------------------------------------|
| 1. 発表者名<br>小川和久・岡崎巧実・小林弘和・中西俊博・富田章久 |
| 2. 発表標題<br>時間領域における光子の超短波動関数の直接測定   |
| 3. 学会等名<br>第43回量子情報技術研究会 (QIT43)    |
| 4. 発表年<br>2020年                     |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

投稿論文のプレプリント: K. Ogawa et al., arXiv:2102.06561.

6. 研究組織

|  |                           |                       |    |
|--|---------------------------|-----------------------|----|
|  | 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|--|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

|         |         |
|---------|---------|
| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|