

令和 6 年 6 月 19 日現在

機関番号：62603

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K20217

研究課題名（和文）錐最適化における悪条件問題の求解

研究課題名（英文）Solving ill-posed conic optimization problems

研究代表者

ロウレンソ ブルノ・フィゲラ (Lourenco, Bruno F.)

統計数理研究所・統計基盤数理研究系・准教授

研究者番号：80778720

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000円

研究成果の概要（和文）：凸錐の幾何学において、様々な新たな結果を示した。特に、多面錐の自己性の構造を明らかにし、双極錐(hyperbolicity cone)の自己同型群に対して様々な結果をしめした。「恭順錐」(amenable cone)という新たな凸錐のクラスを提案し、その性質を調べた。面縮小法を用いて、一般の錐線形計画問題の求解法を提案した。

また、錐線形計画問題におけるエラーバウンドの計算のために新たなフレームワークを提案し、様々な新たなエラーバウンドの結果が得られた。

凸集合における実行可能性問題に対して、エラーバウンドを用いた様々な新しい収束率の結果を示した。以上述べられた結果は査読付き雑誌に出版された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Conic optimization is a class of problems that is quite useful in practice, with applications in many fields. Through this project, we helped to elucidate some aspects of conic optimization that will be helpful when solving certain challenging instances.

研究成果の概要（英文）：We proved several results on the geometry of general convex cones, including a characterization of self-duality of polyhedral cones and a study on automorphisms of certain hyperbolicity cones. We also proposed the notion of "amenable cones", proved its properties and compared it to other classical notions of facial exposedness. We developed new techniques based on facial reduction for regularizing conic linear programs. One of the main new results of this project was a new framework for computing error bounds based on the notion of facial residual functions and facial reduction. New error bounds were computed for symmetric cones, exponential cones, p-cones and power cones. We proposed a new framework for obtaining convergence rate results for algorithms for convex feasibility problems. All the aforementioned results were published in peer-reviewed journals.

研究分野：Continuous optimization

キーワード：conic optimization error bounds amenable cones p-cones exponential cone facial reduction

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

Conic linear programming (CLP) corresponds to the task of optimizing a linear function subject to the constraint that the decision variable belongs to the intersection of an affine space and a convex cone. Examples of CLPs include linear programs (LPs), semidefinite programs (SDPs) and many others. Unfortunately, as we move from LPs to more complex classes of problems, certain kinds of ill-posedness/ill-behavior appear which makes it difficult to actually solve a given CLP instance. In those cases, a solver may fail to obtain the right answer or may wrongly declare that some instance is feasible/infeasible.

Since the central objects in conic programming are convex cones, there have been many efforts in trying to further elucidate the theoretical and geometric properties of general convex cones. At the start of this project, while much was known about certain classes of cones such as the positive semidefinite matrices, there were many useful cones whose properties were not adequately explored. In addition, even for classical problem classes such as SDPs, there was much that was not known about the possible ways that a CLP instance can misbehave and how best to address that in theory and practice.

2. 研究の目的

The motivation for this project was to deepen our understanding of ill-posedness/ill-behavior in CLPs and to develop techniques to better analyze and handle ill-posed instances. To do so, our goal was to investigate the theoretical properties of general convex cones, explore a few important families of cones and further develop certain techniques based on facial reduction.

3. 研究の方法

We advanced the goals of this project through collaboration with researchers both in Japan and abroad. This included online zoom meetings and, before the COVID-19 pandemic, international visits. During this project, we wrote several papers and submitted them to peer-reviewed journals. We also presented several of our results in international conferences.

4. 研究成果

We obtained new results on the following topics.

Theoretical Properties of Cones

In a paper published in the *Mathematical Programming* journal, we introduced the class of amenable cones. Initially, amenability was introduced with the goal of obtaining error bound results for certain classes of cones (more on that later), and in [1], we showed that symmetric cones (which include the special case of positive semidefinite matrices) are amenable. Although we omit the precise definition of amenability here, it turns out that amenability is a sufficient condition for a cone to have another useful property called *niceness*.

Amenability turned out to be a useful facial exposedness property and, with the goal of further understanding the class of amenable cones, we wrote a paper published at the *SIAM Journal on Optimization* [2], where we carefully examined the properties of amenable cones and further showed that all spectrahedral cones are amenable. In that paper we also showed that there exist nice cones that are not amenable. Later, in a *Mathematical Programming* paper [3], we showed that all hyperbolicity cones are amenable.

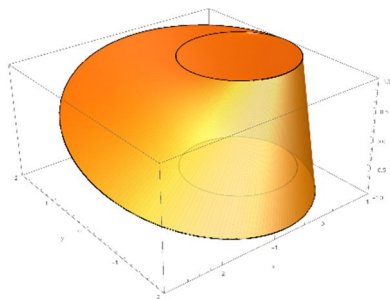


Figure 1 – A picture from [3] depicting a 3D slice of a 4D cone that is nice but not amenable.

Other related theoretical work we did on the structure of cones included a study of automorphisms of certain hyperbolicity cones [10], a characterization of self-duality for polyhedral cones [11] and the study of certain properties of spectral functions associated to Euclidean Jordan algebras [12]. One curious finding described in [13] is that it is possible to systematically search for self-dual polyhedral cones by solving semidefinite programs, see Figure 2.

Facial reduction and related techniques

In [14], we developed a new technique based on facial reduction to “completely solve” (in theory) arbitrary conic linear programs by solving a sequence of “well-behaved” intermediary conic linear programs. Here, “completely solving” includes deciding whether a specific instance is feasible/infeasible, computing the optimal value and an optimal solution (if one exists). We also revisited Ramana’s famous extended dual for semidefinite programs and provided a simple derivation based on elementary linear algebra techniques in [15].

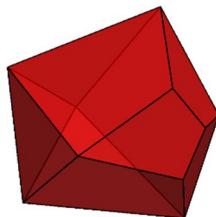


Figure 2 – A picture from [13] describing a 3D slice of a 4D numerically self-dual polyhedral cone found via semidefinite programming.

Error bounds

One of the main outputs of this project is a new framework for computing error bounds for conic linear programs. This work started in [16], initially for amenable cones and was later expanded to arbitrary cones in [17]. Both [16] and [17] were published at the Mathematical Programming journal. The key ingredients for our framework are the newly introduced notion of facial residual function (FRF) which is then combined with a facial reduction technique in order to derive the final error bound.

Essentially, we showed that the problem of determining error bounds for certain problems associated to conic linear programs boils down to the computation of the facial residual functions for the underlying cone. Initially FRFs were only known for symmetric cones (see [18]), but later we developed techniques for computing FRFs for other cones, which allowed us to obtain new error bound results for exponential cones [19], p-cones [20] and power cones [21]. We also developed techniques to examine whether certain error bounds are “optimal” [22] and explored applications of error bounds in determining certain algebraic properties of cones in [23].

Among the new error bounds we obtained, the ones for the exponential cone were particularly curious, since we found examples where the underlying error bound was not Hölderian. Previous examples in the literature of non-Hölderian behavior were mostly confined to artificial examples, but the exponential cone example shows that this may happen even for cones that are widely useful in practice.

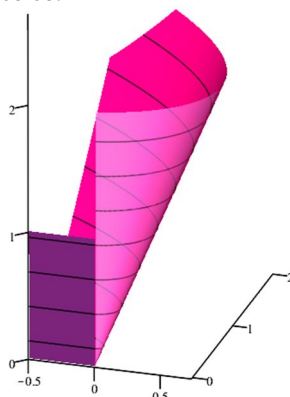


Figure 3 - A picture from [19] which shows a part of the exponential cone.

We also introduced a new framework for the study of error bounds for convex sets and used it to analyze the convergence rates of certain algorithms . A new aspect of the work done in is that we were able to obtain concrete convergence rates even when the underlying error bound is not Hölderian. This enabled, in particular, to obtain convergence rates for certain problems involving exponential cones.

References

Scott B. Lindstrom; [Bruno F. Lourenço](#) and Ting Kei Pong. Optimal error bounds in the absence of constraint qualifications with applications to the p-cones and beyond, to appear at Mathematics of Operations Research.

Ying Lin; Scott B. Lindstrom; [Bruno F. Lourenço](#) and Ting Kei Pong. Generalized power cones: optimal error bounds and automorphisms, SIAM Journal on Optimization, Vol. 34(2), 2024, pp. 1316-1340.

Tianxiang Liu and [Bruno F. Lourenço](#). Convergence analysis under consistent error bounds, Foundations of Computational Mathematics, Vol. 24, 2024, pp. 429-479.

[Bruno F. Lourenço](#); Vera Roshchina and James Saunderson. Hyperbolicity cones are amenable, Mathematical Programming, Vol. 204, 2024, pp. 753-764.

João Gouveia and [Bruno F. Lourenço](#). Self-dual polyhedral cones and their slack matrices, SIAM Journal on Matrix Analysis, Vol. 44(3), 2023, pp. 1096-1121.

Masaru Ito and [Bruno F. Lourenço](#). Automorphisms of rank-one generated hyperbolicity cones and their derivative relaxations, SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry, Vol. 7(1), 2023, pp. 236-263.

Scott B. Lindstrom; [Bruno F. Lourenço](#) and Ting Kei Pong. Error bounds, facial residual functions and applications to the exponential cone, Mathematical Programming, Vol. 200, 2023, pp.229–278.

[Bruno F. Lourenço](#); Vera Roshchina and James Saunderson. Amenable cones are particularly nice, SIAM Journal on Optimization, Volume 32 (3), 2022, pp. 2347-2375.

[Bruno F. Lourenço](#) and Gábor Pataki. A simplified treatment of Ramana's exact dual for semidefinite programming, Optimization Letters, Volume 17, 2023, pp. 219-243.

[Bruno F. Lourenço](#); Masakazu Muramatsu and Takashi Tsuchiya. Solving SDP Completely with an Interior Point Oracle, Optimization Methods and Software, Volume 36(2-3), 2021, pp. 425-471.

[Bruno F. Lourenço](#) and Akiko Takeda. Generalized subdifferentials of spectral functions over Euclidean Jordan algebras, SIAM Journal on Optimization, Volume 30 (4), 2020, pp. 3387–3414.

[Bruno F. Lourenço](#). Amenable cones: error bounds without constraint qualifications, Mathematical Programming, Volume 186, March 2021, pp. 1–48.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計14件（うち査読付論文 14件 / うち国際共著 7件 / うちオープンアクセス 7件）

1. 著者名 Lindstrom Scott B., Lourenco Bruno F., Pong Ting Kei	4. 巻 -
2. 論文標題 Optimal Error Bounds in the Absence of Constraint Qualifications with Applications to p-Cones and Beyond	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Mathematics of Operations Research	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1287/moor.2022.0135	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Lin Ying, Lindstrom Scott B., Lourenco Bruno F., Pong Ting Kei	4. 巻 34
2. 論文標題 Generalized Power Cones: Optimal Error Bounds and Automorphisms	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Optimization	6. 最初と最後の頁 1316 ~ 1340
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/22M1542921	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Lourenco Bruno F., Roshchina Vera, Saunderson James	4. 巻 204
2. 論文標題 Hyperbolicity cones are amenable	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematical Programming	6. 最初と最後の頁 753 ~ 764
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10107-023-01958-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Ito Masaru, Lourenco Bruno F.	4. 巻 7
2. 論文標題 Automorphisms of Rank-One Generated Hyperbolicity Cones and Their Derivative Relaxations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry	6. 最初と最後の頁 236 ~ 263
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/22M1513964	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Poirion Pierre-Louis, Lourenco Bruno F., Takeda Akiko	4. 巻 664
2. 論文標題 Random projections of linear and semidefinite problems with linear inequalities	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 24 ~ 60
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2023.01.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Liu Tianxiang, Lourenco Bruno F.	4. 巻 24
2. 論文標題 Convergence Analysis under Consistent Error Bounds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Foundations of Computational Mathematics	6. 最初と最後の頁 429 ~ 479
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10208-022-09586-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Lourenco Bruno F., Roshchina Vera, Saunderson James	4. 巻 32
2. 論文標題 Amenable Cones Are Particularly Nice	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Optimization	6. 最初と最後の頁 2347 ~ 2375
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/20M138466X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Lindstrom Scott B., Lourenco Bruno F., Pong Ting Kei	4. 巻 200
2. 論文標題 Error bounds, facial residual functions and applications to the exponential cone	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematical Programming	6. 最初と最後の頁 229 ~ 278
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10107-022-01883-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Lourenco Bruno F., Pataki Gabor	4. 巻 17
2. 論文標題 A simplified treatment of Ramana 's exact dual for semidefinite programming	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Optimization Letters	6. 最初と最後の頁 219 ~ 243
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11590-022-01898-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tsuchiya Takashi, Lourenco Bruno F., Muramatsu Masakazu, Okuno Takayuki	4. 巻 200
2. 論文標題 A limiting analysis on regularization of singular SDP and its implication to infeasible interior-point algorithms	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematical Programming	6. 最初と最後の頁 531 ~ 568
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10107-022-01891-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Gouveia Joao, Lourenco Bruno F.	4. 巻 44
2. 論文標題 Self-Dual Polyhedral Cones and Their Slack Matrices	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 1096 ~ 1121
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/22M1519869	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Lourenco Bruno F., Takeda Akiko	4. 巻 30
2. 論文標題 Generalized Subdifferentials of Spectral Functions over Euclidean Jordan Algebras	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Optimization	6. 最初と最後の頁 3387 ~ 3414
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/19M1245001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Lourenco Bruno F., Muramatsu Masakazu, Tsuchiya Takashi	4. 巻 36
2. 論文標題 Solving SDP completely with an interior point oracle	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Optimization Methods and Software	6. 最初と最後の頁 425 ~ 471
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/10556788.2020.1850720	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Lourenco Bruno F.	4. 巻 186
2. 論文標題 Amenable cones: error bounds without constraint qualifications	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematical Programming	6. 最初と最後の頁 1 ~ 48
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10107-019-01439-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計21件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 14件)

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 Error bounds based on facial residual functions
3. 学会等名 ICIAM (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 Facial Residual Functions, Error Bounds and Applications
3. 学会等名 SIAM Conference on Optimization (OP23) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Lourenco Bruno F.
2. 発表標題 自己双対多面錐の Slack 行列について
3. 学会等名 数理最適化:モデル,理論,アルゴリズム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Lourenco Bruno F.
2. 発表標題 Koans of Cones: self-dual polyhedra
3. 学会等名 Matrix workshop on Convexity, Geometry and Computation (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Lourenco Bruno F.
2. 発表標題 双曲錐の自己同型群について
3. 学会等名 最適化:モデリングとアルゴリズム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 Error bounds for conic problems and an application to the exponential cone
3. 学会等名 SIAM Conference on Optimization 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 Consistent error bounds and convergence rates
3. 学会等名 IFORS 2021 (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 双曲錐の露出性について
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2021年秋季研究発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 Error bounds and facial residual functions for conic linear programs
3. 学会等名 One World Optimization Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 Completely solving general SDPs
3. 学会等名 Workshop on Continuous Optimization and Related Topics
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 凸錐の幾何学の最近の結果
3. 学会等名 モデリングを通して見えた世界
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 On error bounds for conic linear programs
3. 学会等名 INFORMS 2021 (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 On consistent error bounds and convergence rates
3. 学会等名 WOMBAT 2021 (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 Consistent Error Bounds And Convergence Rates In Convex Feasibility Problems
3. 学会等名 20th Biennial Computational Techniques and Applications Conference (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 凸錐の露出性について
3. 学会等名 数理最適化の理論・アルゴリズム・応用
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 Error bounds in conic optimization
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会-RAMP (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 Spectral functions and an apology of Jordan Algebras
3. 学会等名 WoMBat 2020 (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 On amenable cones and error bounds
3. 学会等名 RICAM Special Semester on Optimization - Workshop 6 - Conic and Copositive Optimization (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 Amenable cones and error bounds
3. 学会等名 Workshop on Geometry and Optimisation - UNSW (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 Amenable cones and error bounds
3. 学会等名 NACA-ICOTA2019 - Hakodate (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Bruno F. Lourenco
2. 発表標題 Amenable cones and error bounds
3. 学会等名 6th ICCOPT - Berlin (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	伊藤 勝 (Ito Masaru)		

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	リュウ ティエンシャン (Liu Tianxiang)		
研究協力者	村松 正和 (Muramatsu Masakazu)		
研究協力者	奥野 貴之 (Okuno Takayuki)		
研究協力者	ポイロン ピーエア・ルーイー (Poirion Pierre-Louis)		
研究協力者	武田 朗子 (Takeda Akiko)		
研究協力者	土谷 隆 (Tsuchiya Takashi)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関

オーストラリア	Curtin University	UNSW	Monash University	
ブラジル	University of Sao Paulo	State University of Campinas		
中国	Hong Kong Polytechnic University			
ポルトガル	University of Coimbra			
米国	UNC at Chapel Hill			