

令和 6 年 6 月 3 日現在

機関番号：34416

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K20230

研究課題名（和文）非正規確率微分方程式モデルの汎用的統計手法の開発とその実装

研究課題名（英文）Development and implementation of generic statistical methods for non-Gaussian stochastic differential equation models.

研究代表者

上原 悠禎 (Uehara, Yuma)

関西大学・システム理工学部・准教授

研究者番号：00822545

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：高頻度データの表現モデルの一つである非正規確率微分方程式モデルを対象とし、幅広い駆動ノイズクラスへ統一的に適用できる統計手法の構築を主眼に研究を行なった。具体的には、主に、モデルの誤特定を考慮した、正規型擬似最尤推定量の漸近分布を近似するためのブロック型のブートストラップ手法を構築した。また、対数周辺正規型擬似尤度の展開に基づくBIC型のモデル選択規準を導出し、その性質を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非正規確率微分方程式モデルは、駆動ノイズの分布特性の豊富さから高い表現力を持っているものの、その微小時間挙動の複雑さが問題となっていた。本研究により、広範の非正規確率微分方程式モデルのクラスへ適用可能な統計手法が得られたことで、高頻度データ解析の発展に寄与すると考えられる。

研究成果の概要（英文）：We have conducted research on non-Gaussian stochastic differential equation models, which are one of the candidate models for describing high-frequency data. We focus on the construction of statistical methods which can be applied to a wide range of driving noise classes in a unified manner. Specifically, we developed a block bootstrap method to approximate the asymptotic distribution of the Gaussian quasi maximum likelihood estimator, taking into account the model misspecification. We also derived a BIC-type model selection criterion based on the expansion of the log marginal Gaussian quasi likelihood and clarified its properties.

研究分野：統計学

キーワード：高頻度データ 統計学 確率微分方程式

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 観測技術やコンピュータの発展により、大規模なデータを取得出来るようになった現代社会において、特に高頻度で観測される時系列データ(高頻度データ)からの情報抽出が重要となっている。時系列データに広く見られる非正規性を考慮した非正規確率過程により駆動される非正規確率微分方程式モデルは、高頻度データの背後にある時間発展現象の候補記述モデルの一つである。当該モデルは連続時間モデルの一種であり、連続時間軸を考えることで、観測の高頻度性を取り入れた統計理論構築が可能である。

(2) 本研究で着目したのは、非正規確率過程の一つであり、独立定常増分性を有するレヴィ過程である。本確率過程は、ポアソン分布やガンマ分布など幅広い分布を含む無限分解可能分布と一対一の対応をもつ。また、対応する分布に応じて、サンプルパスのジャンプの様相が異なるため、時系列データの多様な分布特性や挙動の表現に富んでいる。一方で、その微小時間挙動は多岐に渡ることから、広範の非正規確率微分方程式モデルのクラスへ統一的に適用できる統計手法は、一部のパラメータ推定に関する結果を除き乏しいという問題点があった。

2. 研究の目的

本研究では、高頻度観測を想定し、広範の非正規確率微分方程式モデルに対して、統一的に適用できる

- (1) モデル誤特定のリスクの下での統計手法の確立
- (2) 統計モデルを定量的に評価するモデル選択規準の構築とその実装を目的とし研究を行なった。

3. 研究の方法

非正規確率微分方程式からの高頻度観測を想定する。また、観測時刻が発散するエルゴード的な枠組みを取り扱う。こうした条件下で、非正規確率微分方程式モデルの係数内のパラメータ推定を行う方法として、平均構造と分散構造のみに着目する正規型擬似最尤推定法がある。本手法は、係数の誤特定下においても真のモデルに正規型擬似尤度の意味で近くなるようなパラメータを推定でき、その漸近正規性や裾確率評価が与えられている。しかし、係数誤特定下では、既存の漸近分散の推定量が機能しないため、信頼区間構築や統計的仮説検定が理論的に困難であった。本研究では、以下の方法で研究を進める。

- (1) リサンプリングやサブサンプリングの手法を用いて、係数誤特定下における正規型擬似最尤推定量の漸近分布の近似量を与え、その理論的性質や数値的パフォーマンスを確認する
- (2) 正規型擬似尤度に基づく周辺対数擬似尤度の近似を与えることで、BIC 型の情報量規準を導出し、モデル選択の一致性等を調べる。

4. 研究成果

本研究では主に以下の結果を得た。これらの成果は国内外の研究集会で発表しており、(1)-(2)の成果は国際雑誌に採択され、(3)の成果は投稿準備中である。

- (1) 係数誤特定の下での正規型擬似最尤推定量の漸近分布の近似のため、ブロック型の重み付きブートストラップ法を考案した。具体的には、擬似スコア関数をブロック和へ分割し、それぞれに確率的な重みを課すことで、ブートストラップ擬似スコア関数を構築し、これに基づく推定量により漸近分布を近似するものであり、データで条件付けたブートストラップ分布と漸近分布の収束を理論的に示した。また、正規型擬似最尤推定法は、駆動ノイズが正規性をもつウィーナー過程の場合(すなわちモデルが拡散過程の場合)とそうでない場合で収束レートが異なるという特徴があった。これに対して、収束レートを補正するデータのみで構築できる統計量を提案することで、係数の誤特定および駆動確率過程の正規・非正規を問わず統一的に正規型擬似最尤推定量の漸近分布の近似が可能となった。拡散過程においても、係数誤特定下での漸近分布の近似手法は提案されておらず、その点でも新規性を有する。なお、本成果は *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* に採択されている(参考文献 [1])。
- (2) 駆動確率過程が非正規レヴィ過程である場合、ジャンプ項の係数内のパラメータに関する正規型擬似尤度関数のスコア関数をスケールリングする必要が生じる。そのため、周辺対数擬似尤度の展開を直接行うことは出来なかったものの、ドリフト項とジャンプ項との微小時間挙

動の差異を利用した段階型の周辺対数擬似尤度についての展開(ラプラス近似)が可能であることを示した.これにより,複数の非正規確率微分方程式モデルの係数を選択する定量的な BIC 型の情報量規準規準を得ることができた.また,本規準が従来の BIC と同じく,サンプルサイズが大きくなるにつれ真のモデルを選択する確率が 1 に収束するというモデル選択の一致性を有していることも明らかとした.なお本成果は,*Scandinavian Journal of Statistics* に採択されており(参考文献[2]),統計言語 R における YUIMA パッケージ内に実装されている IC 関数で利用可能である.

- (3) (2)に関連し,特に飛躍型拡散過程のモデル選択問題に取り組んだ.当該モデルは,駆動ノイズは複合ポアソン過程で限定的ではあるものの,保険数理等広く応用されている重要な非正規確率微分方程式モデルのクラスである.この飛躍型拡散過程は,ジャンプ回数で特徴付けることにより,尤度関数を構成する推移密度関数を級数表現することができる.この表現を用いて,期待対数尤度の展開に基づく AIC 型の情報量規準の導出を試みた.推移密度の評価では,マリアヴァン解析や stochastic flow の理論を用いたが,ドリフト係数の有界性の有無により大きく状況が異なることが明らかとなった.ドリフト係数の有界性を仮定すれば上述の AIC 型の情報量規準の導出はできたものの,その仮定を解消することが課題として残った.一方で数値実験においては,係数の有界性問わず概ね良好な結果が確認できている.現段階までの成果をまとめた論文を現在執筆し,国際雑誌へ投稿予定である.

<引用文献>

[1] Uehara, Y. (2023). Bootstrap method for misspecified ergodic Lévy driven stochastic differential equation models.,*Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 75, 533-565.

[2] Eguchi, S. and Uehara, Y. (2020). Schwartz Type Model Selection For Ergodic Stochastic Differential Equation Models.,*Scandinavian Journal of Statistics*., 48(3), 950-968

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yuma Uehara	4. 巻 -
2. 論文標題 Bootstrap method for misspecified ergodic Levy driven stochastic differential equation models	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annals of the Institute of Statistical Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-33
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10463-022-00854-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Eguchi Shoichi, Uehara Yuma	4. 巻 -
2. 論文標題 Schwartz type model selection for ergodic stochastic differential equation models	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Scandinavian Journal of Statistics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1111/sjos.12474	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Yuma Uehara
2. 発表標題 Weighted block bootstrap for misspecified ergodic Levy driven SDE models
3. 学会等名 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 上原悠槇
2. 発表標題 飛躍型拡散過程モデルの統計理論
3. 学会等名 佐賀大学シンポジウム
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 上原悠槇
2. 発表標題 誤特定連続時間モデルのためのブートストラップ理論
3. 学会等名 統計関連学会連合大会2019
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 Yuma Uehara
2. 発表標題 Bootstrap method for misspecified ergodic stochastic differential equation models
3. 学会等名 CMStatistics 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 Yuma Uehara
2. 発表標題 Bootstrap method for misspecified stochastic differential equation models
3. 学会等名 Risk and Statistics - 2nd ISM-UUIm Joint Workshop (国際学会)
4. 発表年 2019年～2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------