

様 式 C - 1 9、F - 1 9 - 1、Z - 1 9 （共通）

科学研究費助成事業

研究成果報告書



令和 5 年 6 月 12 日現在

機関番号：12608

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2018～2022

課題番号：18H05828・19K21020

研究課題名（和文）層の分岐の不変量と特性サイクル

研究課題名（英文）Invariants of ramification and characteristic cycles of sheaves

研究代表者

谷田川 友里（Yatagawa, Yuri）

東京工業大学・理学院・准教授

研究者番号：90819343

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,100,000 円

研究成果の概要（和文）：なめらかな代数多様体上の階数1のなめらかなエタール層は局所体の拡大の一般化であり、境界に沿って分岐が起こる。この分岐を計る対数的な不変量を用いて、対数的な特性サイクルが対数的余接束上に定義される場合に、より一般の構成可能層に対して幾何的に構成される特性サイクルの層の分岐の不変量による計算を与えることが本研究の目標であった。本研究では、対数的な不変量と非対数的な不変量のよいところを合わせ持つ不変量を使うことでブローアップを許せば特性サイクルの台の候補を一般に得られることを示した。また、その候補の基の余次元が2以下の場合に特性サイクルとその台の計算を具体的に与えることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

構成可能層のオイラー数はWeil予想などとも関係の深い歴史的にも重要な大域的な不変量である。オイラー数と局所的な現象である層の分岐との関係はこれまでも盛んに研究されており、オイラー数の分岐の不変量による計算は大域的な不変量を局所的な不変量から得るという幾何学における中心的な問題の一つとも見ることができ。本研究はオイラー数の計算を与える特性サイクルに分岐の不変量による計算を与えることでオイラー数と分岐の不変量を明らかにしようとするものであり、得られた結果はこれまでに知られていた特性サイクルの代数多様体が曲線または曲面の場合の計算に続くものである。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research is to compute the characteristic cycles of a smooth rank 1 sheaf in terms of ramification theory of the sheaf on a smooth variety, which is a generalization of ramification theory of an extension of a local field in equal characteristic. We especially considered the case where the logarithmic characteristic cycle is defined in terms of logarithmic ramification theory of the sheaf. By using a conductor measuring the logarithmic and non-logarithmic ramification of the sheaf efficiently, we obtained a candidate of the support of the characteristic cycle with admitting blow-ups of the variety. Further, in the case where the candidate has the base of codimension less than 3 in the variety, we obtained computations of the characteristic cycle and its support in terms of ramification theory of the sheaf.

研究分野：数論幾何学

キーワード：分岐 エタール層 分岐 導手 特性サイクル

1. 研究開始当初の背景

数論幾何学における分岐理論の目標は、大域的な不変量であるスキーム上の構成可能層に対するコホモロジカルな不変量を局所的かつ数論的な不変量である層の分岐の不変量(局所的な不変量)から得ることである。

近年、Beilinson 氏と斎藤氏により構成された特性サイクルは代数多様体上の一般の構成可能層に対して定義され、交点数としてオイラー数を計算する。また、スワン類などオイラー数以外の不変量との関係も知られている。そのため、オイラー数やスワン類などの大域的な不変量と層の分岐の不変量との関係を明らかにするために、特性サイクルに層の分岐の不変量による計算を与えたい。一方で、特性サイクルは消失輪体とよばれる複雑な数学的対象を用いて構成されているため、直接的な計算は難しく、別の方法を考える必要がある。

階数 1 の層に対して加藤氏によりオイラー数を計算する対数的な特性サイクルが対数的な分岐の不変量を用いて定義されており、その非対数類似として、分岐に条件をつけた上で斎藤氏により特性サイクルの計算が与えられていた。この分岐の条件は対数的な状況下では代数多様体が曲面の場合はブローアップにより解消できるが、非対数的な状況下では一般に解消することができない。研究開始当初、代数多様体が曲面の場合に申請者が得ていた特性サイクルの計算は、対数的な特性サイクルの余接束への持ち上げを構成し、それが特性サイクルに一致することを示すという、それまで非対数的な理論の中で考えられていた特性サイクルの計算に対数的な理論もあわせて用いることで得たものであった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、対数的な理論と非対数的な理論を組み合わせることで、階数 1 の層の特性サイクルに分岐の不変量を用いた計算を与えることである。本研究ではさらに状況を絞り、対数的な特性サイクルが定義できる場合に、特性サイクルの分岐の不変量による計算を与えることを目指す。

3. 研究の方法

研究開始当初に考えていた方法は、特性サイクルを層の曲線への引き戻しの特性サイクルから再構成できるか考えるというものである。本研究で仮定する、対数的な特性サイクルが定義できるという条件は、層の対数的な分岐を計るスワン導手が曲線への引き戻しで退化しないというものである。そのため、まずは対数的な特性サイクルが曲線への引き戻しの対数的な特性サイクルから再構成できるかを考える。対数的な特性サイクルは分岐の不変量を用いて代数的に構成されているため、目標としている特性サイクルよりも考えやすい。これがうまくいけば曲線の上の層の対数的な特性サイクルと特性サイクルはサイクル類として一致することを根拠に、再構成に必要な曲線の候補を得る。計算を目標としている特性サイクルの台は対数的な特性サイクルの台の余接束での逆象に含まれるということがすでにわかっているため、これといくつかの特性サイクルの性質を用いて、特性サイクルにおける各素サイクルの重複度を決定する。

一方、研究を進めていく中で、対数的な特性サイクルの台の引き戻しの既約成分は必ずしも特性サイクルに現れ得る次元のものにはならないため、特性サイクルに項として現れる次元を持つような特性サイクルの台を含む余接束の錐的な閉部分集合を与える必要性が生じた。そこで、計算を目標とする特性サイクルが構成される以前から松田氏により与えられていた、対数的な分岐と非対数的な分岐を効率的に計る不変量を用いることで、そのような余接束の閉部分集合が与えられないか考えることにした。具体的には、松田氏による不変量のアイデアをもとに、曲面の場合に考えた特性サイクルと対数的な特性サイクルの比較の理論を対数的な理論と非対数的な理論を組み合わせた理論と非対数的な理論との比較のかたちで改良し、その理論の中で対数的な特性サイクルの類似として構成した代数的サイクルの台の余接束への引き戻しと特性サイクルの台を比較した。

4. 研究成果

得られた研究成果は主に上の 3 の後半に記述した方法によるものであり、具体的には以下の結果を得た。

- (1) 松田氏による不変量のアイデアをもとにした理論で構成した代数的サイクルは対数的な特性サイクルが定義できる状況においていつでも定義することができ、その台の余接束への引き戻しはブローアップを許せば特性サイクルの台の既約成分をすべて既約成分として含むような余接束の錐的な閉部分集合になる。

さらに、研究開始当初にわかっていた、代数多様体が曲面の場合の特性サイクルの計算と組み合わせることによって次の結果も得た。

- (2) 上記の代数的サイクルの台の余接束への引き戻しが余次元 2 以下の場合、特性サイクルは上で構成した代数的サイクルのサイクルとしての引き戻しに一致する。

これらの結果のうち、(1)の特性サイクルの台の候補の構成および(2)の特性サイクルの計算は得られた当初は代数的サイクルを用いずに与えたもので、新型コロナウイルスによる研究補助機関の延長期間中に代数的サイクルを用いた定式化として改良した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yuri Yatagawa	4. 巻 29
2. 論文標題 Characteristic cycle of a rank one sheaf and ramification theory	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Geometry	6. 最初と最後の頁 471--545
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/jag/758	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuri Yatagawa	4. 巻 157 no. 1-2
2. 論文標題 Having the same wild ramification is preserved by the direct image	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 manuscripta mathematica	6. 最初と最後の頁 233--246
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 7件／うち国際学会 1件）

1. 発表者名 谷田川友里
2. 発表標題 階数1の層の余次元2での特性サイクルと分岐
3. 学会等名 第14回 数論女性の会
4. 発表年 2021年～2022年

1. 発表者名 Yuri Yatagawa
2. 発表標題 Singular support and characteristic cycle of a rank one sheaf in codimension two
3. 学会等名 Arithmetic Geometry - Takeshi 60 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1．発表者名 谷田川友里
2．発表標題 部分的に対数的な分岐理論と特性サイクル
3．学会等名 プロジェクト研究集会2021（招待講演）
4．発表年 2022年

1．発表者名 谷田川友里
2．発表標題 余次元2での特異台と分岐
3．学会等名 プロジェクト研究集会2020（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 Yuri Yatagawa
2．発表標題 Characteristic cycle and ramification theory
3．学会等名 Boston University/Keio University Workshop 2019（招待講演）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Yuri Yatagawa
2．発表標題 Wild ramification and characteristic cycle
3．学会等名 Rational Points on Higher Dimensional Varieties（招待講演）
4．発表年 2019年

1. 発表者名 Yuri Yatagawa
2. 発表標題 Characteristic cycle of a rank 1 sheaf and ramification theory
3. 学会等名 Arithmetic Geometry : l-adic and p-adic aspects (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 谷田川友里
2. 発表標題 Ramification theory and the characteristic cycle of a rank 1 sheaf
3. 学会等名 第2回岡潔女 性数学者セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------