1版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２年　６月　４日現在

機関番号：１３９０１

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2018～2019

課題番号：１８H０５８３１・１９K２１０２２

研究課題名（和文）無限次元タイヒミュラー空間における退化現象の研究

研究課題名（英文）Research on degenerations in infinite dimensional Teichmuller spaces

研究代表者

藤野　弘基（Fujino, Hiroki）

名古屋大学・高等研究院(多元)・特任助教

研究者番号：９０８２４０３７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,630,000円

研究成果の概要（和文）：３次元ユークリッド空間内の極小グラフ（極小曲面であってグラフとして書けるもの）全体と３次元ミンコフスキー空間内の極大グラフ全体との間には自然な双対対応がある。この双対対応によって、前者に対する「無限境界値問題」が後者に対する「光的線分境界値問題」と対応することを示した。さらにこれらの境界値問題の解に対し、“双対対応”と“共役曲面を取る”という操作によって曲面に現れる対称性がどのように移り変わるか明らかにした。
　また３次元ミンコフスキー空間内の極大曲面に対し「境界上の光的線分に関する鏡像原理」を発見した。この鏡像原理を用いることによって特異性を持った複雑な周期極大曲面を構成することが可能となる。

研究成果の学術的意義や社会的意義
境界値問題の対応を示したことにより、一方の境界値問題について既に知られている事実を翻訳して他方の境界値問題に対する結果を得ることができる。例えば、「極小グラフに対する無限境界値問題」の研究の一つの到達点と言える、ジェンキンス・セリンらの結果（1966年）を翻訳して「極大グラフに対する光的線分境界値問題の可解性と一意性」の結果が得られる。
　また「境界上の光的線分に関する鏡像原理」の発見は、曲面論における重要な未解明問題を部分的に解決するものである。さらに得られた鏡像原理はシュワルツの鏡像原理から従うものではないため、これまでに知られていた他の鏡像原理とは全く新しいタイプの対称性を導く。

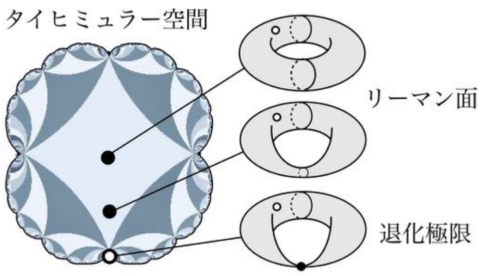
研究成果の概要（英文）：We showed that there exists a 1-to-1 correspondence between solutions of infinite boundary value problems for minimal graphs in 3D Euclidean space and solutions of lightlike line boundary value problems for maximal graphs in 3D Mikowski space. This correspondence is induced from the natural dual correspondence between minimal graphs and maximal graphs formulated by Calabi. Further, some transitions of symmetries appearing on such solutions and their conjugate surfaces were clarified.
We discovered some kind of reflection principle for lightlike boundary segment of maximal surfaces in 3D Minkowski space. This result partially solves an important problem in the field of surface theory. As well as the other reflection principles, this reflection principle enables us to construct complicated periodic maximal surfaces that have some kind of singularities.

研究分野：複素解析学

キーワード：タイヒミュラー空間　擬等角写像　反ド・ジッター空間　極大曲面　極小曲面　鏡像の原理

１．研究開始当初の背景
タイヒミュラー空間はリーマン面のモジュライ空間であるため、その境界に近づくにつれてリーマン面は退化していく（図１参照）。タイヒミュラー空間にはこれまでに様々な理想境界が構成されており、それらは特に退化極限を記述する為に有用である。基点となるリーマン面が有限型である場合、そのタイヒミュラー空間は有限次元となりリーマン面の退化について多くのことが調べられている。例えばマクマレンは、ベアス境界に退化極限としてノード付きリーマン面が稠密に分布していることを示している。

一方有限型でないリーマン面、すなわち無限型リーマン面に対しタイヒミュラー空間は無限次元となりその退化現象は非常に複雑なものになる。例えば同一の型を持つ有限型リーマン面は全て擬等角同値である。特に複素平面から有限個の点を除いたものは、除いた点の個数が同一であれば全て擬等角同値である。しかし複素平面から無限個の点（正確には無限閉離散集合）を除いて得られるリーマン面を考えると、それらは無数の擬等角同値類を定める。従ってこのようなリーマン面を一つ選べば、そのタイヒミュラー空間のある理想境界には無数の互いに同相だが擬等角同値でないリーマン面が現れると示唆される。



※タイヒミュラー空間 (のベアスコンパクト化) の図は
山下氏 (http://www.cajpn.org/Bers/) から引用
図１. リーマン面の退化 (イメージ)

２．研究の目的
本研究の目的は無限次元タイヒミュラー空間におけるリーマン面の退化現象について詳しく調べることである。具体的には（A）無限型リーマン面の退化現象をその特徴によって幾つかに分類・定式化し、（B）それらの退化現象を記述できるようなタイヒミュラー空間の理想境界を見つけ（必要によっては構成し）、退化現象の分類毎に理想境界における分布を調べる。尚、ここでの理想境界とはそのタイヒミュラー空間を位相的に内包するような位相空間における境界を意味する。

３．研究の方法
無限型リーマン面はその多様性から退化現象を一様にまとめて調べることは困難である。それ故、統一的な議論が可能であるようなリーマン面のクラスとして有限型リーマン面が調べられてきた。一方研究代表者は過去の研究で、幾つかの具体的な無限型リーマン面に対しその擬等角変形および退化現象について研究を行った。これらの理由から当初の計画では研究（A）として、代表者が過去の研究で調べていた無限型リーマン面に対し、それらを含むような新たなリーマン面のクラスを設定し統一的な（退化現象についての）議論を与える計画であった。
一方本研究期間の初期において、（B）の研究の為に進めていたボンサンテ・シュレンカー対応（後述）の研究について進展が得られるようになり、（A）の研究とも関連が見えてきたため研究方針を以下のように変更し研究を行なった：

ボンサンテ・シュレンカー対応とは「タイヒミュラー空間」と「三次元反ド・ジッター空間（AdS）内のある種の完備極大曲面全体」との間の一対一対応である。ここで極大曲面とは誘導計量が正定値となるような平均曲率零曲面をいう（AdSはローレンツ多様体の一つである）。従って抽象的なリーマン面がAdSという三次元時空内の具体的な曲面に置き換わるため、退化の様子や、収束したとすれば退化極限を実際に目で見ることが可能となる（図２参照）。　さらにこの対応によって擬等角変形のベルトラミ係数は極大曲面の曲がり具合と対応している。従ってタイヒミュラー空間における複素構造の退化の様子は、極大曲面の曲がり具合を観察することによって調べられるのである。そこで研究（A）・（B）にアプローチする為に、リーマン面の退化をボンサンテ・シュレンカー対応を用いて可視化することを試みた。特に本研究期間ではボンサンテ・シュレンカー対応の精査、および完備極大曲面の退化列を具体的に構成する方法を確立するなどを目標に研究を行なった。

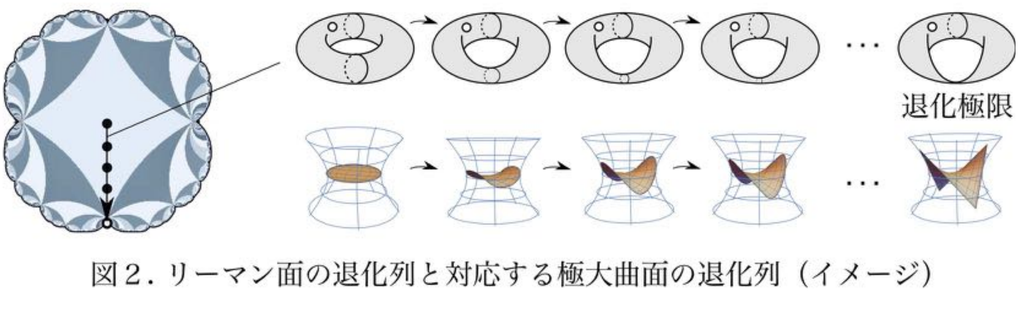


図２．リーマン面の退化列と対応する極大曲面の退化列（イメージ）

まずは完備極大曲面の退化列を具体的に多く構成し観察することから始めたかった。しかし國府・ワイエルシュトラス型表現公式という極大曲面の抽象的な構成法自体は存在するものの、この方法は具体例の構成には不向きであった。それはAdSが曲がった空間であるため、調和写像方程式が複雑になってしまうことによる。さらに極大曲面を構成できたとしてもそれが完備であるかなどは判定ができず、さらに完備性を保ったまま変形する方法が見つかるかなどは全く知られていなかった。

これに対し代表者は2018年度の研究において「グラフ型表現公式」と呼ぶ完備極大曲面を構成するための抽象的な手法を導いた。この手法ではある種の関数論的データから完備な極大曲面を構成できる。つまり構成された曲面の完備性が保証されており、関数論データの摂動をうまく構成できれば完備極大曲面の変形族が得られる。しかしこの表現公式においても関数論的データを具体的に構成することは難しく、具体例の構成を容易にするものではなかった。

一方で平坦時空（ミンコフスキー空間）においてもグラフ型表現公式は同様に構成でき、この場合は具体例の構成も容易である。そのため2019年度では「グラフ型表現公式」の一般的な扱いを調べるための基礎研究として、ミンコフスキー空間内の極大曲面に関するグラフ型表現公式について研究を行った。

４．研究成果

(1). 2018年度の研究ではAdS内の極大曲面に対するグラフ型表現公式を導いた。詳細は「3. 研究の方法」欄で既に述べたのでここでは述べない。

(2). 「ユークリッド空間内の極小グラフ全体」と「ミンコフスキー空間内の極大グラフ全体」との間には双対対応が存在することが古典的に知られている。ここで極小（極大）グラフとは極小（極大）曲面であってグラフとして書けるものをいう。この双対対応によって、前者に対する「無限境界値問題」が後者に対する「光的線分境界値問題」と対応することを示した（図3参照）。またこの場合の境界値問題の解に対し、“双対対応”および“共役曲面を取る”という操作によって曲面上に現れる対称性がどのように移り変わるかを明らかにした（図4参照）。さらに双対対応をグラフ型表現公式を用いて定義できることを示したため、AdSの場合でも同様に双対対応を考えることが可能になった。

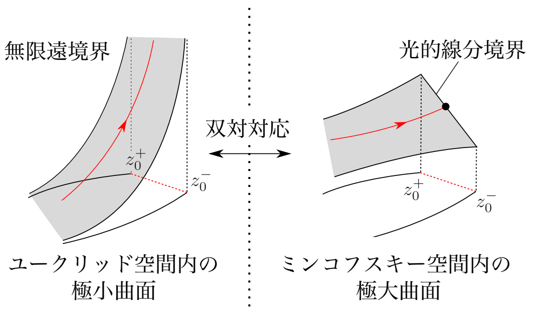


図３. 境界地問題の対応

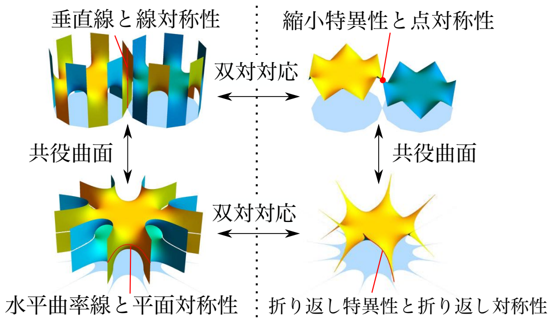


図４. 対称性の移り変わり

この“双対対応に付随する境界地問題の対応”の結果を用いれば、“極小曲面に対する無限境界地問題”について、既知の結果をローレンツ時空の場合に翻訳することができる。例えば無限境界地問題に対する研究の一つの到達点であるジェンキンス・セリンらによる結果（1966年）を翻訳し、“ミンコフスキー空間内の極大曲面に対する光的線分境界地問題の可解性と一意性”に関する結果が得られる。光的線分境界値問題については、例えばバルトニック・サイモンらなどによる研究があるが、特に可解性についてのみ考えるのであれば本研究はより明瞭な結果を与えている。実際上述の結果によって、グラフの定義域の形のみから(初等的に計算可能な条件によって)境界地問題の可解性が判定できる。

(3). ミンコフスキー空間内の極大曲面に対し「境界上の光的線分に関する鏡像原理」を発見した。これは後述の通り曲面論分野における重要な問題を部分的に解決するものである。さらにこの鏡像の原理により複雑な周期極大曲面の構成が可能となった（図5参照）。

これまでに得られてきた極小曲面に対する鏡像原理は全て、H.シュワルツの調和関数に対する鏡像原理から導かれる。例えば極小曲面が境界に直線（線分）を含むとき、その直線に関する線対称（180°回転）図形をつなぎ合わせることにより曲面を解析接続できる。これが“直線に関する鏡像原理”である。他にも別の鏡像原理が証明されるが、それらを繰り返し用いることによって多くの複雑な周期曲面が構成されてきた。曲面論における鏡像原理は複雑な曲面を構成するための強力なツールとして1世紀以上もの間活躍し続けてきた。

一方ミンコフスキー空間内の極大曲面が境界に空間的直線（空間的線分）を含む場合にも全く同じ鏡像原理が成り立つ。この事実はローレンツ幾何学が発展しだして間も無く、空間形の場合と全く同様にして証明された。即ちシュワルツの鏡像原理から従うものである。しかし線分が光的線分に変化した途端に鏡像の原理が破綻してしまうことが知られていた。一般に“光的

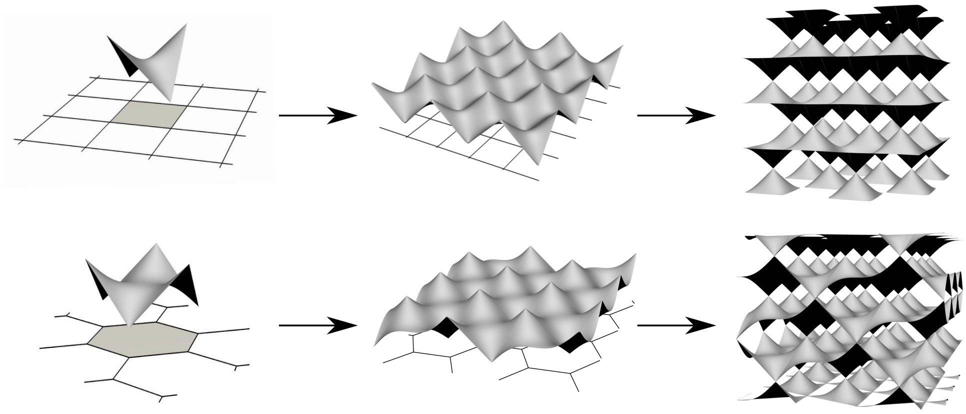


図５．光的線分に関する鏡像原理を用いた周期曲面の構成

線分に対し鏡像の原理が存在するか?”という問題は、歴史的にも、実用の上でも重要な未解決問題として残されていたのである。

上述の(2)の研究は従来の鏡像原理が光的線分に対して破綻する理由を示唆している。それは、等角幾何の観点では、光的線分は“一点”に相当するものであることを解明しているからである。このことから光的線分を越えて曲面を解析接続することは不可能と思える。しかし研究(3)では、ある種のブローアップの手法を用いることにより、特異点解消の要領で光的線分を引き伸ばし曲面の解析接続を構成した。また“光的線分に対する鏡像原理”は他の鏡像原理とは全く違う特殊な対称性を導く：光的線分が“然るべき意味で”端点まで伸びきっている状態であれば、その光的線分の中点に関して点対称をとるという操作によって曲面を解析接続できる（図６参照）。本研究において最も重要な成果の一つは、光的線分に対し“端点”（これ以上、光的線分が極大グラフの境界として伸びないような限界）の概念を発見・定式化したことである。

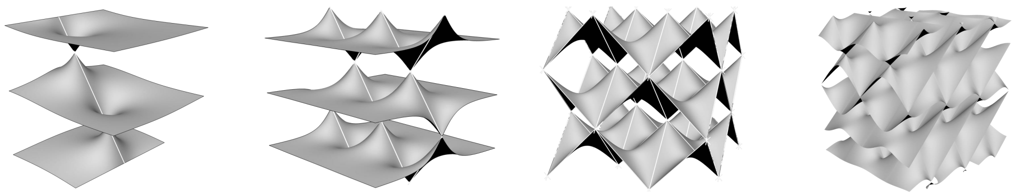


図６．光的線分に対する鏡像原理が適用される極大曲面

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計11件（うち招待講演　0件／うち国際学会　3件）

１．発表者名 藤野弘基
２．発表標題 反ド・ジッター空間内の曲面論と普遍タイヒミュラー理論
３．学会等名 等角写像・値分布論合同研究集会
４．発表年 2018年

１．発表者名 H. Fujino
２．発表標題 Representation formula for complete maximal surfaces in AdS3
３．学会等名 Geometric Function Theory and Related Topics（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 藤野弘基
２．発表標題 反ド・ジッター空間内の完備極大曲面に対する表現公式
３．学会等名 静岡 複素解析幾何セミナー
４．発表年 2019年

１．発表者名 藤野弘基
２．発表標題 反ド・ジッター空間における極大曲面論と普遍タイヒミュラー理論
３．学会等名 Beltrami 方程式勉強会 PartII
４．発表年 2019年

１．発表者名
藤野弘基

２．発表標題
極小・極大グラフ間の双対性に対する単葉調和関数論からの考察

３．学会等名
早稲田双曲幾何幾何学的群論セミナー

４．発表年
2019年

１．発表者名
藤野弘基

２．発表標題
単葉調和函数論から見た極小・極大曲面論

３．学会等名
関数論若手勉強会 at 金沢

４．発表年
2019年

１．発表者名
H. Fujino

２．発表標題
Duality of boundary value problems of minimal and maximal surfaces

３．学会等名
The 3rd International Workshop “Geometry of Submanifolds and Integrable Systems”（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
藤野弘基

２．発表標題
単葉調和関数論から見た極小・極大曲面論

３．学会等名
大阪市立大学複素解析セミナー

４．発表年
2019年

１．発表者名
藤野弘基

２．発表標題
L3 内の極大曲面の拡張性と対称性，および周期曲面

３．学会等名
2019年度「リーマン面・不連続群論」研究集会

４．発表年
2020年

１．発表者名
藤野弘基

２．発表標題
単葉調和関数論から見た極小・極大曲面論

３．学会等名
東工大複素解析セミナー

４．発表年
2020年

１．発表者名
H. Fujino

２．発表標題
Reflection principles for minimal or maximal surfaces

３．学会等名
Workshop on Geometric Function Theory and Special Functions III（国際学会）

４．発表年
2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

発表論文-１：S. Akamine, H. Fujino, “Duality of boundary value problems for minimal and maximal surfaces”, arXiv:1909.00975(2019年9月3日), 現在投稿中.

発表論文-２：S. Akamine, H. Fujino, “Reflection principle for lightlike line segments on maximal surfaces”, arXiv:2002.07978(2020年2月19日), 現在投稿中.

研究成果データベース：https://researchmap.jp/Hiroki_ResearchMap

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考