

令和 2 年 6 月 9 日現在

機関番号：24402

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2018～2019

課題番号：18H05834・19K21024

研究課題名（和文）閉複素多様体の大域的開部分複素多様体

研究課題名（英文）Global open submanifolds of compact complex manifolds

研究代表者

小池 貴之（Koike, Takayuki）

大阪市立大学・大学院理学研究科・講師

研究者番号：30784706

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,300,000円

研究成果の概要（和文）：K3曲面及び射影平面の9点爆発のレビ平坦超曲面，及びその内部として実現されるような階部分集合を中心としてその複素解析幾何学的研究を行った。岡山大学・上原崇人との共同研究ではそのケーラー幾何学的側面への研究へと進展し，その中でより一般的なK3曲面の退化の方法に対応するような貼り合わせ構成についての考察が行われた。同時に射影平面の9点爆発にも進展がみられた。射影平面の9点爆発についての研究に関連しては，その点配置を変えることに対応する複素構造の変形と，それに伴うパラメータ付きでの複素力学系的手法とを活用することで，これまでに分かっていなかった9点配置のもとでのレビ平坦超曲面の存在証明が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多変数関数論の歴史を遡ると必ず登場する楕円曲線及び楕円積分に関する理論は，様々な現代数学の源流と呼ぶに相応しいものである。事実，その代数的・幾何学的・解析的性質の解明やそれらの関連についての考察は，現代にまで通用する様々なアイデアを導き出している。本研究で主な役割を担うK3曲面はその自然な一般化といえ，具体例ではある一方で，数学内外の非常に広範な範囲に及ぶ一般性を秘めた対象である。またヒルベルトの第14問題にも関連する具体例である射影曲面の9点爆発もまた別の文脈から非常に重要な具体例であり，これらに関する本研究は意義深いと言える。

研究成果の概要（英文）：We studied geometric complex analysis mainly on a domain whose boundaries are Levi-flat hypersurface in a K3 surface and a blow-up of the projective plane at nine points. As a joint work with Takato Uehara at Okayama University, our projects have gotten some progress into a Kahler geometrical aspects of such an open submanifolds. Related to this, we also studied some types of new geometrical constructions of K3 surfaces which corresponds to the degeneration of K3 surfaces of type III. At the same time, my research project on a deformation of the blow-up of the projective plane at nine points, which comes from the change of the choice of nine points configurations, have developed. As a result, we found a new sufficient condition for the nine points configurations so that the blow-up admits Levi-flat hypersurfaces.

研究分野：複素幾何学

キーワード：上田理論 レビ平坦超曲面

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

本研究の目的は、閉複素多様体 $X$ について、その複素解析幾何学的構造の理解にあった。本研究の姿勢としては、昨今の複素代数幾何学的分類理論、及び微分幾何学、特にケーラー幾何学に於ける標準ケーラー計量に関する一般論の目覚ましい進展を、個々に与えられた  $X$  の各具体例の複素解析幾何学的構造の理解に直結させるための枠組みの構築を目指すものである。

具体的な研究目標としては、次元の場合に於けるタイヒミュラー空間のフェンチェル-ニールセン座標の高次元化にあたるような、 $X$  のモジュライ空間の良い局所座標系の構成、及び $X$  の標準ケーラー計量の具体的な構成と表示を目指す。そのために、本研究で"大域的開部分多様体"と呼ぶ  $X$  の開部分集合に着目するというのが研究方法であり、またこの着想こそが本研究の最大の特徴・独創性である。

## 2. 研究の目的

先述の意味で、閉複素多様体  $X$  の適切な開部分集合 (これは本研究の中で、主に二つのレビ平坦超曲面に挟まれるような形の開領域というようにして明確化されることとなる) における良い座標や良い計量の構築を行うこと、及びそれを用いた  $X$  自体の (例えば複素構造の変形に関する) 複素解析幾何の研究を行うことが、本研究の目的である。

## 3. 研究の方法

まず複素多様体  $X$  がカラビ・ヤウ、特に  $K3$  曲面の場合から研究を開始した。具体的にはそのリッチ平坦計量と、射影平面の9点爆発のあるザリスキ開集合上の完備リッチ平坦計量との比較を中心的な考察の対象とした。

そもそも本研究課題で考察する"大域的開部分多様体" は、 $X$  が高種数リーマン面やアーベル多様体である場合については、その普遍被覆の基本領域として、また  $X$  がトーリック多様体である場合には (開) 複素トーラスとしてとるというように、幾つかのクラスでは既によく知られているような、「 $X$  の幾何を非常に良く反映する開部分集合」のことである。 $X$  が $K3$ 曲面である場合は、申請者の研究以前にはそのような 候補自体知られていない状態であった。一方で申請者は、"貼り合わせ構成"と呼ばれる新たな手法で、非常に一般的な  $K3$  曲面  $X$  を構成した。そのような  $X$  には、自然に の有力な候補となる開部分集合が(貼り合わせの糊代部分として) 付随する。また、この手法で得られた $K3$ 曲面たち全体の集合は、岡山大学・上原崇人氏との共同研究により、 $K3$  モジュライの中の比較的大部分を占めることが分かってきている状況にあった。まずはこのような $K3$ 曲面について、多変数函数論的手法、その他トーリック多様体等についての組み合わせ論的手法、ケーラー幾何学的手法、またベルグマン核に関する幾何解析的手法を組み合わせることどこまでその座標関数や計量の具体的表示が変形理論の枠組みの中で有用であるのかの検証から研究を開始した。

また同時に、標準ケーラー計量の微分幾何学、モジュライ空間に関する代数幾何学、及びVII型曲面などに代表される非ケーラー多様体の複素幾何学等を中心に、国内外の研究者たちとの打ち合わせのための出張や招聘を活発に行って議論/交流を行うことで、自身の研究の発表・研究環境の整備と研究者同士の連携の強化と構築・及び新しい知識の習得に努めた。

## 4. 研究成果

購入した計算機器による数値計算は、主に $K3$ 曲面の周期として登場するようなサイズの大きな

行列の線形代数的処理などに非常に有用であった。岡山大学・上原崇人との共同研究ではそのケーラー幾何学的側面への研究へとより進展し、その中でより一般的なK3曲面の退化の方法に対応するような貼り合わせ構成についての考察が行われた。同時に射影平面の9点爆発にも進展がみられた。射影平面の9点爆発についての研究に関連しては、その点配置を変えることに対応する複素構造の変形と、それに伴うパラメータ付きでの複素力学系的手法とを活用することで、これまでに分かっていなかった9点配置の下でのレビ平坦超曲面の存在証明が得られた。それらからの考察を通じ、本研究当初の時点で立てていた複素幾何学的予想が精密化でき、それについての初等的考察を行った内容もプレプリントとして最終年度末にまとめることができた。より具体的には、上田による部分多様体近傍の理論で行われた位相的に自明な正則法線束を持つコンパクト超曲面の近傍の線形化の一般化についての考察を行った。今回考察した一般化は、多様体の全空間上で定義された正則直線束が、とあるコンパクト部分多様体上に制限すると位相的に自明であると仮定したうえで、その近傍でその直線束の平坦性がいつ保証されるのかについての予想である。その十分条件としては正則直線束に半正曲率を持つエルミート計量が存在するというを候補として挙げているが、本研究ではその数多くの傍証をえただけにとどまらず、その複素葉層や関連する複素幾何学の理論との関連も考察できた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 8件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 小池貴之
2. 発表標題 Gluing construction of non-projective K3 surfaces and holomorphic tubular neighborhoods of elliptic curves
3. 学会等名 complex analysis special seminar (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小池貴之
2. 発表標題 On a higher codimensional analogue of Ueda theory and its applications
3. 学会等名 東工大幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小池貴之
2. 発表標題 On the neighborhood of a torus leaf and dynamics of holomorphic foliations
3. 学会等名 複素力学系研究とその発展 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小池貴之
2. 発表標題 Arnol'd's type theorem on a neighborhood of a cycle of rational curves
3. 学会等名 葉層構造の幾何学とその応用 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小池貴之
2. 発表標題 Gluing construction of non-projective K3 surfaces and holomorphic tubular neighborhoods of elliptic curves
3. 学会等名 多変数関数論冬セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小池貴之
2. 発表標題 Minimal singular metrics on effective nef line bundles and neighborhoods of the stable base loci
3. 学会等名 Singular Metrics in Complex Kahler Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小池貴之
2. 発表標題 Complex analysis on a neighborhood of a complex submanifold and its applications
3. 学会等名 Sinica-NCTS Geometry Seminar (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小池貴之
2. 発表標題 Complex analysis on a neighborhood of a complex submanifold and its applications
3. 学会等名 Some topics in several complex variables (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----