

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 7 年 6 月 20 日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2019～2024

課題番号：19K21830

研究課題名（和文）ゲージ理論に関連する3次元双曲多様体の不変量

研究課題名（英文）Invariants of hyperbolic 3-manifolds related to the gauge theory

研究代表者

大槻 知忠 (Ohtsuki, Tomotada)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：50223871

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,800,000円

研究成果の概要（和文）：結び目の Kashaev 不変量と双曲体積を関連づける体積予想は、量子トポロジーと双曲幾何をむすびつける懸案の予想である。また、Chern-Simons理論の非自明平坦接続における展開から得られる不変量は、まだまだ研究されておらず、未知の研究領域である。双曲結び目や3次元双曲多様体の双曲構造のホロノミー表現に対応する非自明平坦接続におけるChern-Simons理論の摂動展開から得られる不変量は、体積予想の漸近展開の高次の項に関連することが期待される。これと関連するとおもわれる3次元双曲多様体の3d-indexの挙動について筆者は調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

3次元多様体の幾何構造の手法による分類の帰結として、3次元多様体の分類問題は3次元双曲多様体の分類に帰着される。一方、1980年代に数理解析的手法がトポロジーに導入され、3次元のトポロジーには量子不変量をもたらされた。また、3次元双曲多様体の量子不変量のある種の漸近挙動に双曲体積が現れることが予想されている（体積予想）。この漸近挙動には、比較的最近に導入された不変量である3d-indexが関連することが期待されている。

本研究は、3次元双曲多様体の3d-indexの挙動について、成果を得た。これがさらに「3次元双曲多様体の量子トポロジー」という新しい研究領域を創出することをめざしている。

研究成果の概要（英文）：The volume conjecture relates the Kashaev invariant and the hyperbolic volume of a hyperbolic knot, and it relates the quantum topology and the hyperbolic geometry. Invariants obtained from perturbative expansion of Chern-Simons path integral at a non-trivial flat connection have not been studied well so far.

We expect that such invariants obtained from perturbative expansion of Chern-Simons path integral at the flat connection of the holonomy representation of the hyperbolic structure would be related to higher terms of asymptotic expansion of the volume conjecture. Related to such invariants, the author studies the behaviour of the 3d-index of hyperbolic 3-manifolds.

研究分野：位相幾何学

キーワード：結び目 3次元多様体 不変量

1. 研究開始当初の背景

3次元多様体の幾何構造の手法による分類は、1970年代以降の幾何化予想のプログラムにより進展し、その帰結として、3次元多様体の分類問題は3次元双曲多様体の分類に帰着される。一方、1980年代に数理解物理的手法がトポロジーに導入され、3次元のトポロジーには量子不変量が、4次元のトポロジーにはゲージ理論がもたらされた。この両者は不変量の圏化によって関連づけられる。また、3次元双曲多様体の量子不変量のある種の漸近挙動に双曲体積が現れることが予想されている(体積予想)。この漸近挙動には、最近導入された不変量である3d-indexが関連することが期待されている。本研究では、体積予想の漸近展開を、3d-indexや圏化やゲージ理論を手がかりにして研究し、「3次元双曲多様体の量子トポロジー」という新しい研究領域を創出することをめざしている。この研究は、3次元双曲多様体の分類問題に寄与することが期待される。

2. 研究の目的

従来の量子トポロジーでは、3次元多様体上のChern-Simons摂動理論の自明接続からの寄与の不変量が研究されてきた。その膨大な数の不変量は、豊かな構造をもち、その研究が「量子トポロジー」という研究領域を構築してきた。

一方、Chern-Simons摂動理論の非自明接続からの寄与の不変量は、まだあまり研究されておらず、未知の研究領域である。3次元双曲多様体に対して、体積予想の漸近展開の高次の項に現われる不変量は、3次元双曲多様体の3d-indexや、Chern-Simons摂動理論の非自明平坦接続(双曲構造のホロノミー表現から定まるもの)からの寄与の不変量と、関連することが期待される。そのような不変量も豊かな構造をもち、それらの不変量が「3次元双曲多様体の量子トポロジー」という新しい研究領域をつくることを筆者は期待している。

3. 研究の方法

筆者は、以前の研究で、7交点以下の双曲結び目に対して、Kashaev不変量の漸近展開を計算し、その最初の項に双曲体積が現われることを証明した。これは、この結び目に対して、体積予想が証明されたことを意味する。また、3次元多様体の量子不変量の漸近展開に双曲体積が現れることを主張する「3次元多様体の体積予想」について、筆者は、以前の研究で、8の字結び目を整数係数手術して得られる3次元双曲多様体に対して、この予想が成立することを筆者は証明した。

体積予想の漸近展開の高次の項は、双曲結び目や3次元双曲多様体の不変量であり、そのようにして双曲結び目と3次元双曲多様体の多くの不変量が得られることが期待される。そのような高次の項を漸近展開から直接計算することは、理論的には可能であるはずであるが、実用上はその計算は非常に煩雑になるので、むずかしい。

3d-indexは、カスパ付き3次元双曲多様体(「双曲結び目の補空間」がその典型的な例)の不変量であり、カスパ付き3次元双曲多様体の理想4面体分割上の状態和として定義され、その数理解物理的背景はSL(2,C) Chern-Simons理論である。一般に、状態和は、結び目や3次元多様体の量子不変量を定義するときの典型的な手法であり、一方、3d-indexを定める状態和は、無限和であり、その3次元多様体に双曲構造がはいるときのみ収束する。このことは、3d-indexが「3次元双曲多様体の量子不変量」を与えることを示唆しており、上述の不変量と3d-indexが関連することが期待される。そこで、3d-indexの値の挙動について調べることをめざす。

4. 研究成果

筆者は、双曲結び目の補空間のn次巡回被覆空間の3d-indexの係数の値は、十分大きいnに対して、nの多項式関数になることを示し、また、その3d-indexの値を遷移行列の固有値のn乗和の形に表示した。たとえば、4₁結び目の補空間のn次巡回被覆空間M_n(4₁)の3d-indexの値は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 I(M_1(4_1)) &= 1 - 2q - 3q^2 + 2q^3 + 8q^4 + 18q^5 + 18q^6 + 14q^7 + \dots \\
 I(M_2(4_1)) &= 1 + 2q^2 + 8q^3 - 3q^4 - 32q^5 - 66q^6 - 56q^7 + \dots \\
 I(M_3(4_1)) &= 1 - 2q^3 - 18q^4 - 6q^5 + 138q^6 + 306q^7 + \dots \\
 I(M_4(4_1)) &= 1 + 2q^4 + 32q^5 + 48q^6 - 424q^7 + \dots \\
 I(M_5(4_1)) &= 1 - 2q^5 - 50q^6 - 160q^7 + \dots \\
 I(M_6(4_1)) &= 1 + 2q^6 + 72q^7 + \dots \\
 I(M_7(4_1)) &= 1 - 2q^7 + \dots
 \end{aligned}$$

各 d について、十分大きい n に対して n^d の係数は 0 であることが観察される。また、遷移行列の固有値の値は

$$\begin{aligned} e_1 &= 1 \\ e_2 &= -q + q^{3/2}(u + u^{-1}) + \dots \\ e_3 &= -q + q^{3/2}(u + u^{-1}) + \dots \end{aligned}$$

のようになり、これを用いて、 $M_n(4_1)$ の 3d-index の値は

$$I(M_n(4_1)) = ((e_1^n + e_2^n + e_3^n + \dots)) \text{ の } u^0 \text{ の係数}$$

のように表示される。上述の $I(M_n(4_1))$ の値は、左下領域が 0 になっているが、そのことはその表示の帰結として理解することができる。また、 5_2 結び目の補空間の n 次巡回被覆空間 $M_n(5_2)$ の 3d-index の値は次のようになる。

$$\begin{aligned} I(M_1(5_2)) &= 1 - 4q - q^2 + 16q^3 + 26q^4 + \dots \\ I(M_2(5_2)) &= 1 + 14q^2 + 6q^3 - 107q^4 + \dots \\ I(M_3(5_2)) &= 1 + 3q + 15q^2 - 82q^3 - 24q^4 + \dots \\ I(M_4(5_2)) &= 1 + 8q + 8q^2 - 72q^3 + \dots \\ I(M_5(5_2)) &= 1 + 15q + 20q^2 + 45q^3 + \dots \\ I(M_6(5_2)) &= 1 + 24q + 63q^2 + 216q^3 + \dots \\ I(M_7(5_2)) &= 1 + 35q + 161q^2 + 546q^3 + \dots \end{aligned}$$

とくに、十分大きい n に対して、 q^2 の係数の値は $n(n-2)$ に等しいこと、また、 q^3 の係数の値は $1/4 n(n^3 - 6n^2 + n + 36)$ に等しいことが観察される。また、遷移行列の固有値の値は

$$\begin{aligned} e_1 &= 1 + q^{1/2}(u + u^{-1}) + q(-1 + u^2 + u^{-2}) + q^{3/2}(-2(u + u^{-1}) + u^3 + u^{-3}) + \dots \\ e_2 &= 2^{1/3} q^{2/3} - q + 3/2 q^{3/2}(u + u^{-1}) + \dots \\ e_3 &= 2^{1/3} e^{2\pi i/3} q^{2/3} - q + 3/2 q^{3/2}(u + u^{-1}) + \dots \\ e_4 &= 2^{1/3} e^{-2\pi i/3} q^{2/3} - q + 3/2 q^{3/2}(u + u^{-1}) + \dots \end{aligned}$$

のようになり、これを用いて、 $M_n(5_2)$ の 3d-index の値は

$$I(M_n(5_2)) = ((e_1^n + e_2^n + e_3^n + e_4^n + \dots)) \text{ の } u^0 \text{ の係数}$$

のように表示される。筆者は、これについて、論文「On the 3D-index of finite cyclic covers of hyperbolic knot complement」(プレプリント)(ジャーナル投稿中)を執筆し、2024年11月に、東京大学において、「双曲結び目の補空間の無限巡回被覆の 3D index について」の発表を行った。

関連する研究について、筆者は、2023年12月に、3次元多様体の量子不変量について、著書「幾何学と物理」(朝倉書店)を出版した。また、筆者は、2024年に、3次元多様体の LMO 不変量の精密化について、論文「A refinement of the LMO invariant for 3-manifolds with the first Betti number 1」(Internat. J. Math. 35)を出版した。

筆者は、毎年5月に数理解析研究所において研究集会「Intelligence of Low-dimensional Topology」を開催した。この研究集会において、筆者は未解決問題集を編集した。また、この研究集会の報告集を数理解析研究所講究録として出版した。また、筆者は、2020年2月と、2024年2月に、数理解析研究所において、国際会議「East Asian Conference on Geometric Topology」を開催した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Ohtsuki Tomotada	4. 巻 35
2. 論文標題 A refinement of the LMO invariant for 3-manifolds with the first Betti number 1	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X24500204	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Ohtsuki (ed.)	4. 巻 2227
2. 論文標題 Problems on Low-dimensional Topology 2022	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 108-123
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Ohtsuki (ed.)	4. 巻 2191
2. 論文標題 Problems on Low-dimensional Topology 2021	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 153-163
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Ohtsuki (ed.)	4. 巻 2163
2. 論文標題 Problems on Low-dimensional Topology 2020	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kyokkyuroku	6. 最初と最後の頁 120-132
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Ohtsuki Tomotada, Takata Toshie	4. 巻 370
2. 論文標題 On the quantum SU(2) invariant at $q = \exp(4\pi i \sqrt{-1}/N)$ and the twisted Reidemeister torsion for some closed 3-manifolds	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Commun. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 151-204
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-019-03489-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Klaus Stephan, Kojima Sadayoshi	4. 巻 60
2. 論文標題 On the moduli space of equilateral plane pentagons	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry	6. 最初と最後の頁 487 ~ 497
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13366-018-0429-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Fukaya Hidenori, Furuta Mikio, Matsuo Shinichiroh, Onogi Tetsuya, Yamaguchi Satoshi, Yamashita Mayuko	4. 巻 380
2. 論文標題 The Atiyah-Patodi-Singer Index and Domain-Wall Fermion Dirac Operators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1295 ~ 1311
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-020-03806-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 大槻知忠
2. 発表標題 双曲結び目の補空間の無限巡回被覆の 3D index について
3. 学会等名 多様体のトポロジーの進展 (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 古田幹雄
2. 発表標題 Finite dimensional approximations and Floer homotopy types
3. 学会等名 Intelligence of Low-dimensional Topology (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 小島定吉
2. 発表標題 Degtyarev-Florens-Lecunoa による eta関数の一般化
3. 学会等名 代数的位相幾何学の奇跡と展望 (オンライン) (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 小島定吉
2. 発表標題 写像トーラスの単体体積について
3. 学会等名 リーマン面・不連続群論 (東工大でハイブリッド) (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 小島定吉
2. 発表標題 コンピュータ支援数学の研究倫理
3. 学会等名 東京大学数理科学研究科談話会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 小島定吉
2. 発表標題 Degtyarev-Florens-Lecuona による eta-関数の一般化
3. 学会等名 代数的位相幾何学の軌跡と展望（招待講演）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計4件

1. 著者名 大槻 知忠、満洲 俊樹、亀谷 幸生	4. 発行年 2023年
2. 出版社 朝倉書店	5. 総ページ数 392
3. 書名 幾何学百科IV 幾何学と物理	

1. 著者名 小島定吉	4. 発行年 2022年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 168
3. 書名 ポアンカレ予想	

1. 著者名 小島定吉	4. 発行年 2021年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 192
3. 書名 多角形の現代幾何学 新装版	

1. 著者名 小島定吉、編著	4. 発行年 2020年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 240
3. 書名 サーストーン万華鏡	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	古田 幹雄 (Furuta Mikio) (50181459)	東京大学・大学院数理科学研究科・教授 (12601)	
研究分担者	小島 定吉 (Kojima Sadayoshi) (90117705)	早稲田大学・理工学術院・その他(招聘研究員) (32689)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 East Asian Conference on Geometric Topology	開催年 2020年～2020年
国際研究集会 East Asian Conference on Geometric Topology	開催年 2024年～2024年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------