

令和 6 年 6 月 2 日現在

機関番号：24405

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K21831

研究課題名（和文）カンドルと対称空間と組み合わせ論の横断的研究

研究課題名（英文）Transversal Study of Quandles, Symmetric Spaces, and Combinatorics

研究代表者

田丸 博士（Tamaru, Hiroshi）

大阪公立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：50306982

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 5,000,000円

研究成果の概要（和文）：カンドルと対称空間と組み合わせ論の横断的研究を進展させることができた。カンドルに対して s -可換部分集合という概念を新たに定式化した論文を発表した。この概念は組み合わせ論あるいは符号理論と密接に関係するものであり、さらに対称空間論で研究されている対蹠集合の拡張でもある。また、対称空間を観察することで得られた新しいカンドルの構成方法は、グラフを用いるものであり、これも横断的な研究成果である。さらに、「カンドルと対称空間」と題する研究集会を毎年開催し、概説論文が日本数学会の出版する雑誌「数学」に掲載予定となるなど、新たな研究の進展および後進の育成にも寄与していると考えられる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

我々の研究成果は、カンドルの研究を中心として、対称空間論および組み合わせ論などの様々な分野と関係する新たな研究領域を開拓するものと自負している。これにより、カンドルの研究に新しい道具や概念を持ち込み、さらに対称空間論などの既存の研究分野にも新しい問題意識を持ち込んでおり、その学術的意義は大きいと考える。また、研究代表者と大学院生等の若手研究者の共同研究も多く、さらに我々の研究成果に触発されて他大学の大学院生が新たな研究成果を得るなどの成果もある。このように我々の研究成果は、多くの教育的効果を上げており、若手研究者育成にも寄与していると考えられる。

研究成果の概要（英文）：We have made progress in the transversal study of quandles, symmetric spaces, and combinatorics. We published a paper that newly formulates the concept of s -commutative subsets for quandles. This concept is closely related to combinatorics and coding theory, and is also an extension of antipodal sets studied in the theory of symmetric spaces. Additionally, the new method of constructing quandles obtained by observing symmetric spaces utilizes graphs, which is another outcome of our transversal research. Furthermore, we organized an annual conference titled "Quandles and Symmetric Spaces" every year, and an overview paper is scheduled to be published in the journal "Sugaku" issued by the Mathematical Society of Japan. We believe this contributes to the advancement of new research and the fostering of future researchers.

研究分野：幾何学

キーワード：カンドル 対称空間 グラフ 組み合わせ論

1. 研究開始当初の背景

カンドルは結び目理論の研究を出自とする代数系であり、今日では数学の様々な分野と関係することが知られている。その中でも特に、対称空間はカンドルとなることが知られていたが、両者を関連付ける研究はほとんどなかったと思われる。我々は、対称空間論の離散化を意識したカンドルの研究を行ってきたが、これは我々が最初に提唱して開始された新たな研究領域であると考えている。

我々はこれまでの研究において、対称空間論の登場する様々な概念をカンドルに移植することに成功している。その最初の研究において、我々は対称空間論に登場する「二点等質性」の概念をカンドルに対しても定式化した。リーマン多様体が二点等質であるための必要十分条件は、ユークリッド空間または階数 1 対称空間と等長的になることなので、二点等質カンドルは、カンドルの世界における「階数 1」に相当する基本的なクラスであることが期待できる。なお、有限な二点等質カンドルは、その後の研究によって完全な分類が得られている。また、カンドルに対して「平坦性」を定式化する研究成果も、我々は得ている。

上記のような研究の過程において、我々の研究が組み合わせ論や符号理論と密接に関係することが分かってきている。有限な平坦カンドルの典型例は、対称空間内の部分カンドルとして構成できるが、その構成をつぶさに観察すると、グラフを用いた非常に一般的な構成が可能なが分かった。また、そのような部分カンドルを特徴付ける研究が進展中だが、その条件は組み合わせ論あるいは符号理論と極めて相性が良いことが分かってきている。

2. 研究の目的

上で述べたようなこれまでの研究を踏まえて、カンドルの研究において、対称空間論や組み合わせ論との関係を意識し、相互に関連付ける研究を行うことを目的とした。特に、すでに研究を開始しているカンドル内の部分集合に着目した研究を行う。リーマン対称空間に対しては「階数」という重要な不変量があるが、これは然るべき部分多様体の次元として定義される。また、別の不変量として「2-number」があるが、これはリーマン対称空間内の然るべき有限部分集合の元の個数の最大値として定義される。これらの研究のように、カンドル内の部分集合のクラスを定式化すること、その元の個数などの情報を用いて不変量を定義すること、などは興味深い研究目的である。

また、対称空間論や組み合わせ論に登場する概念を用いたカンドルの研究だけに留まらず、点対称を中心とした対称空間論の離散化に関する研究など、既存の研究分野に新たな問題意識を持ち込むことも目的とする。これによって横断的な新たな研究領域を構築することを目指す。上で述べたカンドル内の部分集合の候補として、 s -可換と我々が呼ぶ条件がある。このような条件をみたす部分集合の研究は、対称空間の研究においても新しいものである。このような研究は、カンドルおよび対称空間上での符号理論、とすることができる。このような研究を創始することも、本研究の目的である。

3. 研究の方法

上記の目的を達成するためには、様々な分野の研究者との議論あるいは意見交換が重要である。そのために、研究集会やセミナーでの講演を積極的に行うだけでなく、関係する研究者が集まる機会を作ることが必要である。そのための一つの方法として、これまでも開催してきた「カンドルと対称空間」という研究集会を継続して開催する。この研究集会では、幅広い分野の研究者を招聘し、また若手研究者にも講演を提供することを強く意識する。

また研究代表者の元々の専門分野は微分幾何学であり、対称空間の幾何学の研究に関しては、世界中の研究者と繋がりをもっている。対称空間の研究者にとって、カンドルという概念は分野外のものであり、定義も聞いたことがないという場合が多いと考えられる。一方でカンドルの定義は、対称空間論を知っていれば容易に理解できるものである。日本国内だけでなく、対称空間の幾何学を研究する国外の研究者に対しても、我々の研究を通してカンドルの研究を紹介することは、分野の裾野の広がりにも大きく寄与すると考える。

4. 研究成果

カンドルと対称空間と組み合わせ論の横断的研究を進展させることができた。その一つとして、カンドルに対して s -可換部分集合という概念を新たに定式化した論文を発表した。この概念は組み合わせ論あるいは符号理論と密接に関係するものであり、さらに対称空間論で研究されている対蹠集合の拡張でもある。我々の論文においては、 s -可換部分集合に関する基本的な性質を明らかにするとともに、非常に簡単な具体例に対して s -可換部分集合を決定している。特に、いくつかの具体例においては「極大 w -可換部分集合は合同を除いて一意的」という非常に良い性質が成り立つことが分かった。これらの成果は、次の研究に繋がる基本的なものであると考えている。

また、対称空間を観察することで、新しいカンドルの構成方法を得ることができた。特に、様々な対称空間内の然るべき部分集合を調べ、その性質を詳細に観察することで、構成のための着想を得たものである。この構成はグラフを用いるものであり、これも横断的な研究成果である。我々の結果によると、任意のグラフからカンドルを構成することが可能であり、さらに構成されたカンドルが等質であるための必要十分条件はグラフが頂点推移的となることである。この成果は、対称空間やカンドル内の部分集合の研究においても、グラフを用いた組み合わせ論的なカンドルの構成という点でも、興味深いものだと考える。

さらに、「カンドルと対称空間」と題する研究集会を毎年開催し、様々な分野の研究者との議論や情報共有を行うことができた。実際、この研究集会での議論が共同研究に発展した例もあり、我々の研究だけでなく、より広い範囲での研究領域の発展に寄与したと考えている。また研究代表者は概説論文を執筆し、日本数学会の出版する雑誌「数学」に掲載が決定している。このことは、我々の研究領域を周知し、その幅を広げ、新たな研究の進展および後進の育成にも寄与するものだと考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計15件（うち査読付論文 8件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Akira Kubo, Mika Nagashiki, Takayuki Okuda, Hiroshi Tamaru	4. 巻 777
2. 論文標題 A commutativity condition for subsets in quandles --- a generalization of antipodal subsets	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 103--125
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/777/15631	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takahiro Hashinaga, Akira Kubo, Yuichiro Taketomi, Hiroshi Tamaru	4. 巻 -
2. 論文標題 A Lie theoretic interpretation of realizations of some contact metric manifolds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 New Horizons in Differential Geometry and Its Related Fields	6. 最初と最後の頁 71--90
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/9789811248108_0005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yuji Kondo, Hiroshi Tamaru	4. 巻 75
2. 論文標題 A classification of left-invariant Lorentzian metrics on some nilpotent Lie groups	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 89--117
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2748/tmj.20211122	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hiroshi Tamaru	4. 巻 -
2. 論文標題 可解岩澤群内の余次元 1 リッチソリトン部分群	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 研究会「部分多様体幾何とリー群作用 2020」記録集	6. 最初と最後の頁 21--34
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miguel Dominguez-Vazquez Miguel, Victor Sanmartin-Lopez, Hiroshi Tamaru	4. 巻 152
2. 論文標題 Codimension one Ricci soliton subgroups of solvable Iwasawa groups	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal de Mathematiques Pures et Appliquees	6. 最初と最後の頁 69--93
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.matpur.2021.05.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Akira Kubo, Takayuki Okuda, Hiroshi Tamaru	4. 巻 23
2. 論文標題 Remarks on totally geodesic complex curves in Hermitian symmetric spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of The 23rd International Differential Geometry Workshop on Submanifolds in Homogeneous Spaces & Related Topics	6. 最初と最後の頁 129--139
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Tamaru	4. 巻 9
2. 論文標題 Quandles from the viewpoint of symmetric spaces --- a survey	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 OCAMI Reports	6. 最初と最後の頁 100--113
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.24544/ocu.20220209-001	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Tamaru	4. 巻 2210
2. 論文標題 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part V	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 57--65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takahiro Hashinaga, Akira Kubo, Yuichiro Taketomi, Hiroshi Tamaru	4. 巻 -
2. 論文標題 A Lie theoretic interpretation of realizations of some contact metric manifolds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 New Horizons in Differential Geometry and Its Related Fields	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Luis Pedro Castellanos Moscoso, Hiroshi Tamaru	4. 巻 -
2. 論文標題 A classification of left-invariant symplectic structures on some Lie groups	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Beitrage Algebra Geom.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuji Kondo, Hiroshi Tamaru	4. 巻 -
2. 論文標題 A classification of left-invariant Lorentzian metrics on some nilpotent Lie groups	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Tohoku Math. J.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akira Kubo, Mika Nagashiki, Takayuki Okuda, Hiroshi Tamaru	4. 巻 777
2. 論文標題 A commutativity condition for subsets in quandles --- a generalization of antipodal subsets	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Differential Geometry and Global Analysis, in Honor of Tadashi Nagano. Contemp. Math.	6. 最初と最後の頁 103--125
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 田丸博士	4. 巻 -
2. 論文標題 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part IV.	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 研究集会「部分多様体論・湯沢 2018」記録集	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Shinobu Fujii, Hiroshi Tamaru	4. 巻 -
2. 論文標題 Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres --- some recent results	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 22nd International Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems	6. 最初と最後の頁 97--104
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takayuki Okuda, Akira Kubo, Hiroshi Tamaru	4. 巻 -
2. 論文標題 Dynkin indices for totally geodesic submanifolds in compact symmetric spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 22nd International Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems	6. 最初と最後の頁 195--200
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計21件(うち招待講演 21件/うち国際学会 9件)

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Geometry of some nilpotent Lie groups with left-invariant metrics
3. 学会等名 東京理科大学理工学部数学科談話会(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Lie groups whose moduli spaces of left-invariant Riemannian metrics are one-dimensional
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用 2022 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 On the moduli spaces of left-invariant Riemannian metrics on Lie groups
3. 学会等名 Mini-Workshop: Global Analysis and Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 A commutativity condition for subsets in symmetric spaces and quandles
3. 学会等名 部分多様体論と関連する幾何構造研究の深化と融合 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Totally geodesic surfaces in symmetric spaces and applications
3. 学会等名 The 23rd International Differential Geometry Workshop on Submanifolds in Homogeneous Spaces and Related Topics - The 19th RIRCM-OCAMI Joint Differential Geometry Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Codimension one Ricci soliton subgroups of solvable Iwasawa groups
3. 学会等名 対称空間と群作用の幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Introduction to quandles from the viewpoint of symmetric spaces
3. 学会等名 北海道大学幾何学コロキウム (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Quandles from the viewpoint of symmetric spaces - a survey
3. 学会等名 カントルと対称空間 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Milnor-type theorems for left-invariant pseudo-Riemannian metrics
3. 学会等名 Workshop: 擬リーマン多様体の幾何の諸相 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Codimension one Ricci soliton subgroups of solvable Iwasawa groups
3. 学会等名 The 6th China-Japan Geometry Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Introduction to quandles and discrete symmetric spaces
3. 学会等名 Geometry of Symmetric Spaces and Group Actions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 田丸博士
2. 発表標題 A commutativity condition for subsets in quandles --- a generalization of antipodal subsets
3. 学会等名 筑波大学微分幾何学セミナー (online) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田丸博士
2. 発表標題 可解岩澤群内の余次元 1 リッチソリトン部分群
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2020 (online) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres
3. 学会等名 Workshop on the Isoparametric Theory (Beijing Normal University) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Geometry of homogeneous hypersurfaces in noncompact symmetric spaces
3. 学会等名 第2回水戸幾何小研究集会 (茨城大学) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 On the moduli spaces of left-invariant geometric structures
3. 学会等名 Workshop on geometric analysis and homogeneous geometry (The University of Queensland) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres --- some recent results
3. 学会等名 The 22nd International Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems (Kyungpook National University) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Geometry of homogeneous hypersurfaces in noncompact symmetric spaces
3. 学会等名 Symmetry and shape - Celebrating the 60th birthday of Prof. J. Berndt (Universidade de Santiago de Compostela, Spain) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Left-invariant metrics and submanifold geometry of noncompact symmetric spaces
3. 学会等名 AMS Special Session on Differential Geometry and Global Analysis, Honoring the Memory of Tadashi Nagano (1930-2017) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Quandles and discrete symmetric spaces
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会 2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Quandles and discrete symmetric spaces
3. 学会等名 第15回代数・解析・幾何学セミナー (鹿児島大学) (招待講演)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Tamaru's WebPage
<https://www.omu.ac.jp/sci/tamaru/>

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計4件

国際研究集会 The 7th Japan-China Geometry Conference	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 2023 OCAMI-RIRCM International Workshop on Geometry and Symmetric Spaces	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 The 23rd International Differential Geometry Workshop on Submanifolds in Homogeneous Spaces and Related Topics (The 19th RIRCM-OCAMI Joint Differential Geometry Workshop)	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 Geometry of Symmetric Spaces and Group Actions	開催年 2022年～2022年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------