

令和 5 年 6 月 23 日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2019～2022

課題番号：19K21833

研究課題名（和文）単体複体におけるランダムネスと幾何構造のインタラクション

研究課題名（英文）Interaction between randomness and geometric structures in simplicial complexes

研究代表者

日野 正訓（Hino, Masanori）

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：40303888

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 5,000,000円

研究成果の概要（和文）：単体複体族の幾何学構造と確率論との関わりを主な興味とした研究を行った。単体複体におけるBetti数と対応するグラフラプリアンの固有値との関連性について考察した。さらに、ランダム単体複体の族に関するパーシステントホモロジーに関連した、大数の法則や大偏差原理などの極限定理を証明した。これらはランダムグラフの研究の高次元版と見なせるものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ランダムグラフの研究が長い歴史を持つことに比較して、その高次元版と見なされるランダム単体複体の研究はまだ発展途上といえる。対象の高次元化を行うことで、空間の幾何構造とランダムネスとの結びつきがより顕になることが期待され、数学理論としての理論展開に興味を持たれるものである。本研究課題においては、そのような問題意識に基づいた研究を行った。

研究成果の概要（英文）：This study mainly focuses on the geometric structure of a family of simplicial complexes and its relation to probability theory. To this end, the relationship between Betti numbers of simplicial complexes and eigenvalues of the corresponding graph Laplacian was discussed. Furthermore, we proved limit theorems, such as the law of large numbers and the large deviation principle, in relation to the persistent homology for a family of random simplicial complexes. These studies can be regarded as higher-dimensional analogues of the study of random graphs.

研究分野：確率論

キーワード：単体複体 確率論 幾何構造

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、従前から確率論と幾何学との関連性の深化について強い関心を抱いてきた。特に、無限次元空間やフラクタル集合のような、通常の意味での微分構造を持たない空間において、確率論の見地からはどのような幾何構造が自然なのかという問題意識を長年持ってきた。離散的対象である単体複体の増大族に関するパーシステントホモロジーの基本的な性質とランダム化した際の性質の研究を知り、離散空間における確率論と幾何学の融合的研究という観点から興味を抱いた。その後、共同研究において、Betti 数に関する新奇な定量評価を得、先行研究で提出された問題を解決することができた。この研究で開発した技法を更に洗練させて一般論にまで発展させ、確率論と幾何学の連関という平素からの研究思想に合致した形での新たな理論の創出が可能なのではないかと考えるようになったことが、本研究課題を実施するにあたっての背景である。

2. 研究の目的

本研究では、離散的な対象である単体複体(族)の位相幾何構造と確率論との関わりについて研究を行う。特に、ランダムな単体複体およびその族に対して、その幾何学的構造を明らかにする新たな手法を開発することにより、確率論と幾何学を繋ぐ新理論の創始を目指す。具体的には、まず単体複体(族)の幾何学構造が、ランダムネスの付与によりどのように統率されるかを研究する。最近の研究を通じて予期される、単体複体における高次 Betti 数と適切なグラフラプシアン固有値との関連性を明らかにする新たな一般理論を構築する。次に、ランダムネスという確率論的な情報から定まる幾何構造について研究する。「ラプシアンから定まる高次ホモロジー的な幾何概念」を定義し、付随する確率過程との関係を明確にすることで、単体複体における確率過程と幾何構造とを関連付け、位相幾何学研究の確率解析的アプローチに道を拓くことを目指す。

3. 研究の方法

(1)単体複体(の族)の幾何学構造が、ランダムネスの付与によりどのように統率されるかについて、最近の研究代表者の研究において、単体複体の各リンクが定めるグラフ上の関数に作用するラプシアン固有値情報を用いた新しい Betti 数評価を与え、ランダム行列理論のアイデアと組み合わせることで、ランダム単体増大族のパーシステントホモロジーの漸近挙動に関する良い評価を得た。ここでの議論はまだ粗削りであり、高次 Betti 数と(適切な)グラフラプシアン固有値の間には更なる密接な関係が予期されるため、これらを明らかにする新たな一般理論の構築に向けて検討を行う。

(2)(1)を確率論の見地から補完するものとして、ランダムな単体複体(の族)の極限定理、例えば大数の法則や大偏差原理を導くことによって、幾何学構造がどのように極限定理に影響するかを調べる。

(3)単体複体の枠組に直接合致しないような例に対しても、幾何学的構造と確率論の関わりについて理解が深まることが期待されるような問題について必要に応じて取り組み、柔軟な対応をとる。

4. 研究成果

(1)ランダムクリークモデルを含むフィルトレーションの族(図1参照)に対して、パーシステントベッチ数の漸近挙動を得る方法について検討を重ねた。従前に知られているのはパーシステント Betti 数の和の評価のみであるが、これをパーシステント Betti 数の分布の評価にまで精密化することは、フィルトレーションの幾何学構造を研究するという見地からみて重要なステップであることが理由である。ランダムグラフの場合に知られている、重み付きポアソン木の上のスペクトル解析に帰着させる議論を一般化することの重要性について認識を深めた。パーシステントラプシアンに付随するスペクトル測度の収束に関して新たな障害が発生することと、極限オブジェクトから具体的な情報を引き出すことの困難さが予想以上にあることが判明し、現状では当初のモデルに対する直接の結果は得られていないが、予備段階としてスペクトル測度に関する再帰公式という部分を抽出して成果を取りまとめる方向で検討を行っている。

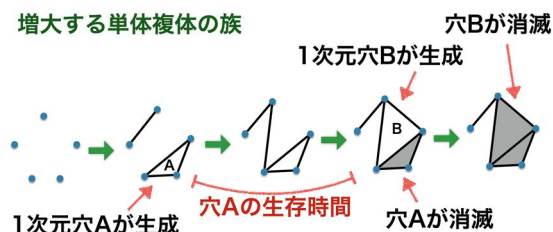


図1: フィルトレーションの族の概念図

(2)ユークリッド空間内のランダム方体複体に対して、余次元 1 のホモロジー生成元が自然に定めるパーコレーション現象に関する研究を実施した。無限クラスターの一意性や臨界確率などについて、従来のボンダパーコレーション理論の高次元拡張となる成果が得られた。

(3)マグニチュード・ホモロジーの組合せ論および確率論的研究に関して、まず与えられたグラフのマグニチュード・ホモロジーが対角型になる条件を、離散モース理論を用いて明らかにした。その後、エルデシュ・レンニ ランダムグラフに対してこの結果を応用することで、対角型に関する相転移現象を数学的に特徴づけた。

(4)マルチパラメータ・パーシステントホモロジーの非区間型直既約表現の出現頻度に関して、ランダム方体複体モデルを用いた研究を実施した。劣臨界領域における非区間型表現は、大数の法則の極限值として 0 に収束することが証明でき、その意味において出現頻度が低いことが明らかになった。

(5)ランダム方体複体上で定まるパーシステント図について、大偏差原理の成立を証明した。まず、パーシステント Betti 数に関して大偏差原理を示し、その後にパーシステント図における評価に持ち上げるという手法を取っている。パーシステント図に関する大偏差原理が示されたのはこのモデルが初めてである。

(6)ランダムシェルピンスキーガasket (図 2 を参照) を典型例とするフラクタルについて、エネルギー測度と自然な参照測度との特異性について研究を行い、緩やかな仮定のもとで特異性を示した。これまでに知られていた結果は、自己相似性を持つフラクタルや劣ガウス型の熱核評価を持つ空間の場合に限られていた。今回の結果は、従前の枠組に含まれないような新しい幾何学的特性に関する例についての主張となっている。

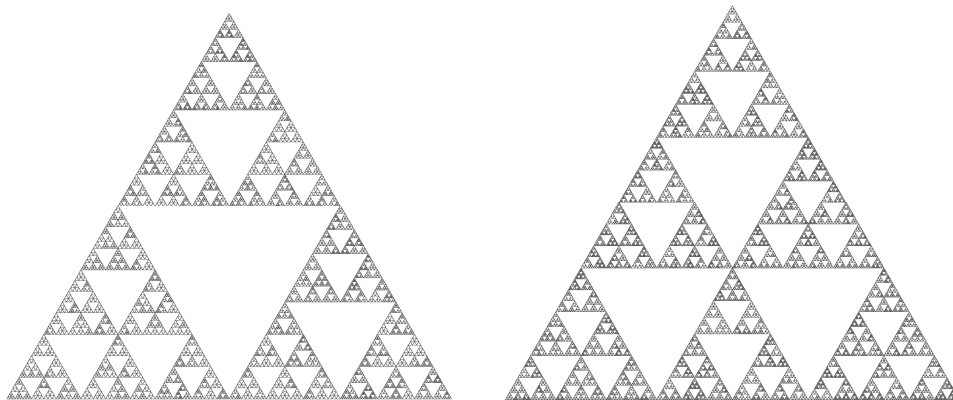


図 2:ランダムシェルピンスキーガasket の例

(7)自己相似フラクタルの典型例である 2 次元シェルピンスキーガasket において、楠岡測度を底測度とする推移密度関数の局所スペクトル次元の定量評価に関する研究を行った。局所スペクトル次元があるマルコフ連鎖の不変測度を用いて表示できることを利用し、その不変測度が小さな集合上に集中していることを示したのちに数式処理システムを援用するという新たな方法により、従来知られていたものよりも精度の良い近似値の数値計算を行った (表 1 参照)。従前は有効数字 1 桁の数値しか知られていなかったところ、5 桁の精度の近似値を得ることができた。さらに、ハウスドルフ測度を底測度とする場合のスペクトル次元よりも局所スペクトル次元の方が、値が真に小さいことを証明した。

表 1: 局所スペクトル次元の数値計算 (右列)

n	Estimates of ρ	Estimates of d_s^{loc}
0	$-0.9502705 \dots \leq \rho \leq -0.8918673 \dots$	$1.271650 \dots \leq d_s^{\text{loc}} \leq 1.300763 \dots$
1	$-0.9353387 \dots \leq \rho \leq -0.9269092 \dots$	$1.289402 \dots \leq d_s^{\text{loc}} \leq 1.293544 \dots$
2	$-0.9320224 \dots \leq \rho \leq -0.9287450 \dots$	$1.290308 \dots \leq d_s^{\text{loc}} \leq 1.291920 \dots$
3	$-0.9307764 \dots \leq \rho \leq -0.9299684 \dots$	$1.290911 \dots \leq d_s^{\text{loc}} \leq 1.291308 \dots$
4	$-0.9302937 \dots \leq \rho \leq -0.9300433 \dots$	$1.290947 \dots \leq d_s^{\text{loc}} \leq 1.291071 \dots$
5	$-0.9302027 \dots \leq \rho \leq -0.9301663 \dots$	$1.291008 \dots \leq d_s^{\text{loc}} \leq 1.291026 \dots$

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masanori Hino	4. 巻 -
2. 論文標題 Estimates of the local spectral dimension of the Sierpinski gasket	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Applied and Numerical Harmonic Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiko Asao, Yasuaki Hiraoka, Shu Kanazawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Girth, magnitude homology, and phase transition of diagonality	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masanori Hino and Madoka Yasui	4. 巻 -
2. 論文標題 Singularity of energy measures on a class of inhomogeneous Sierpinski gaskets	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Dirichlet Forms and Related Topics in honor of Professor Fukushima's Beiju	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hino Masanori	4. 巻 PRPR 76
2. 論文標題 Asymptotics of Integrals of Betti Numbers for Random Simplicial Complex Processes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Fractal Geometry and Stochastics VI	6. 最初と最後の頁 125 ~ 140
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-59649-1_6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiraoka Yasuaki, Mikami Tatsuya	4. 巻 15
2. 論文標題 Percolation on Homology Generators in Codimension One	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topological Data Analysis and Beyond. Workshop at NeurIPS 2020	6. 最初と最後の頁 307 ~ 342
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-43408-3_12	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Hiraoka, H. Ochiai, T. Shirai	4. 巻 84
2. 論文標題 Zeta functions of periodic cubical lattices and cyclotomic-like polynomials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 93 ~ 121
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/08410093	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Masanori Hino
2. 発表標題 Estimates of the local spectral dimension of the Sierpinski gasket
3. 学会等名 確率解析とその周辺 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yasuaki Hiraoka
2. 発表標題 Is the persistence diagram really a stable data descriptor?
3. 学会等名 Computational Persistence 2022 (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yasuaki Hiraoka
2. 発表標題 Girth, magnitude homology, and phase transition of diagonality
3. 学会等名 Conference on Applied, Combinatorial and Toric Topology (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 日野正訓, 安井円香
2. 発表標題 Singularity of energy measures on a class of inhomogeneous Sierpinski gaskets
3. 学会等名 日本数学会2021年度秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yasuaki Hiraoka
2. 発表標題 On characterizing rare events in persistent homology
3. 学会等名 Online workshop "Beyond TDA -- Persistent topology and its applications in data sciences" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yasuaki Hiraoka
2. 発表標題 On characterizing rare events in persistent homology
3. 学会等名 Thematic Einstein Semester on Geometric and Topological Structure of Materials (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yasuaki Hiraoka
2. 発表標題 Characterizing rare events in persistent homology
3. 学会等名 Joint Mathematics Meetings, AMS Special Session on Applied Topology
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yasuaki Hiraoka
2. 発表標題 Characterizing rare events in persistent homology
3. 学会等名 Topological Data Analysis and Beyond. Workshop at NeurIPS 2020
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 日野正訓
2. 発表標題 拡散過程が定める次元
3. 学会等名 語ろつ「数理解析」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yasuaki Hiraoka
2. 発表標題 Limit theorems of persistent homology
3. 学会等名 Joint Mathematics Meetings, AMS Special Session on Applied Topology (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	平岡 裕章 (Hiraoka Yasuaki) (10432709)	京都大学・高等研究院・教授 (14301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2019	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Stochastic Analysis, Random Fields and Integrable Probability	開催年 2019年～2019年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------