

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 25 日現在

機関番号：15401

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2019～2022

課題番号：19K23224

研究課題名（和文）ボラティリティ変動の激しさに関する統計的仮説検定理論の構築

研究課題名（英文）Statistical Hypothesis Testing for Roughness of Volatility

研究代表者

高島 哲也（Takabatake, Tetsuya）

広島大学・人間社会科学研究所（社）・助教

研究者番号：80846949

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：対数実現分散時系列データから潜在変数である対数ボラティリティ過程の駆動ノイズが有すHurst指数とボラティリティを正確に推定するためには、非整数Brown運動の高頻度観測データが観測誤差を含む状況下での疑似尤度型推定量の漸近挙動の理論解析、そして推定量の漸近的な誤差分布の導出が必要である。本研究では、非整数Brown運動の高頻度観測データが観測誤差を含む状況下で尤度比の局所的な漸近挙動を解析し、観測誤差を含む状況下でのHurst指数とボラティリティの推定量の最適な収束レートと漸近分散の導出、そして漸近的な最適性を満たす推定量を構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で行なった高頻度観測データからスケール則や観測誤差の構造を推定する手法の開発、特に最適な収束レートや漸近分散を満たす推定量の開発は幾つかの技術的困難によりこれまで未解決な問題であったため、本研究の学術的意義は大きいと考える。また上述したファイナンスの問題に限らず、計量経済学や工学などの分野で観測される実際のデータには、推定したい確率過程とは別の確率過程が観測誤差として含まれる状況がごく自然に生じるため、様々な分野への応用が今後期待できる。

研究成果の概要（英文）：In order to accurately estimate the Hurst index and volatility of the driving noise of the log-volatility process, which is a latent variable, from the log-realized variance time series data, we developed a theory of estimating the Hurst index and volatility of the driving noise under noisy observations. In this study, we analyze the local asymptotic behavior of the likelihood ratio random fields under the condition that high-frequently observed data of the fractional Brownian motion contains observational errors, so that we succeeded to derive optimal convergence rates and asymptotic variances of estimators and construct an estimator that satisfies the asymptotic optimality.

研究分野：数理統計学

キーワード：非整数Brown運動 高頻度観測 観測誤差 確率ボラティリティ

様式 C-19、F-19-1、Z-19（共通）

1 研究開始当初の背景

金融資産価格の変動リスク管理の際、資産価格変動の大きさを表すボラティリティは重要な要素である一方、ボラティリティは金融市場で直接的に観測できない潜在変数であること、そして金融市場の構造に起因する様々な誤差の影響により、ボラティリティが有す時系列的性質の解明には未だ多くの困難が存在する。本研究では、既存モデルでは再現不可能なデータの特徴を再現でき、更にボラティリティ予測の精度を改善するとして、近年数理ファイナンス・計量ファイナンス分野で関心を持たれているラフボラティリティモデルを念頭に置き、潜在変数であるボラティリティの変動の激しさを推定する方法の開発、特に推定量の不確実性の評価や統計的仮説検定手法の開発を行う。

2 研究の目的

対数実現分散時系列から潜在変数であるボラティリティの変動の激しさを推定する際の不確実性を評価するために、疑似尤度型推定量の漸近分布の導出を試みる。

3 研究の方法

本研究では、対数実現分散時系列の差分列を局所近似した際の主要項と本質的に同じモデルである、非整数 Brown 運動の高頻度観測データが独立な正規型ノイズを観測誤差に含む状況を詳細に解析することで、推定量の漸近分布の導出および推定量の漸近的最適性について研究を行う。具体的には、上記設定下で尤度比確率場の局所的な漸近挙動（局所漸近正規性）を明らかにし、更に尤度比確率場の漸近挙動を利用して、推定量の最適収束レート・漸近分散の導出および漸近的に最適な推定量の構成を行う。

4 研究成果

本研究では主に以下の研究成果を得た。また下記研究成果については国内外での発表や国際雑誌への投稿を行い、一部はすでに採択されている。

- (1) 対数実現分散時系列の計測誤差に関する中心極限定理を用いて、計測誤差を近似的にモデル化した枠組みで疑似尤度型推定量を構成することで、対数実現分散時系列に含まれる計測誤差の影響に関して頑健な推定量を提案し、更に提案した推定量の漸近的性質を明らかにした。具体的には、提案した推定量が以下の漸近的性質を満たすことを証明した：(1) 対数ボラティリティ過程のトレンド構造に依存せず、未知定数を一致推定できること。(2) 対数ボラティリティ過程にトレンド項がない場合に、(a) Hurst 指数の真値 $H_0 \in (1/2, 1)$ である時の漸近正規性、(b) 帰無仮説 $H = H_0 \in (1/2, 1)$ 、対立仮説 $H \neq H_0$ である時に尤度比検定統計量が自由度 1 のカイ二乗分布へ分布収束すること。また提案手法は、資産価格過程とボラティリティ過程に相関（レバレッジ効果）がある場合においても良い推定精度を有すことを詳細な数値実験により明らかにした。更に、主要株価指数の日次実現分散時系列データを用いて、理論的に精緻な方法で、ラフボラティリティモデルと整合的な推定結果を得ることに成功した。
- (2) 定常 Gauss 時系列の共分散構造を特徴づけるスペクトル密度関数が原点に特異性を持つ状況下（時系列の

系列相関の減衰が遅い状況。また長期記憶性と呼ばれる性質に関連。)で、定常 Gauss 時系列の二次形式のキュムラントの極限定理に関する精密な誤差評価を与えた。更に得られた研究成果および知見を活用することで、以下に述べる研究成果 (3), (5), (6) を得ることに成功している。

- (3) トレンドを有す非整数 Brown 運動の高頻度観測データから、トレンド構造に依らず非整数 Brown 運動の時系列構造を特徴づける未知定数 (Hurst 指数とボラティリティ) を推定する方法を提案した。(1) と同様の方法で、一致推定量 (疑似 Whittle 推定量) の構成は可能だが、技術的な問題に起因し、トレンドが存在しない場合のみしか推定量の漸近分布は導出できていなかった。本研究では、少なくともトレンドが時間に関して線形に変化する場合に、疑似 Whittle 推定量の漸近正規性を証明し、推定量の漸近分布がトレンドの影響を受けないことを明らかにした。
- (4) Hurst 指数 $H < 1/2$ である非整数 Brown 運動を駆動ノイズに持つエルゴード的な Ornstein-Uhlenbeck 過程のパスの軌跡から平均回帰係数と平均回帰水準を同時推定する問題を考察した。これまでに最尤推定量が成分毎に漸近正規性を有することは知られているが、同時分布の漸近分布の導出や漸近有効性の証明は未解決課題であった。本研究では、非対角なレート行列を用いて上記統計モデルに対して局所漸近正規性を示し、最尤推定量の漸近分布の導出と漸近有効性を証明した。
- (5) 非整数 Brown 運動の高頻度観測時系列がある独立な正規ノイズを観測誤差に持つ状況下で、Hurst 指数とボラティリティの推定における推定量の最適な収束レートおよび漸近分散の導出、そして漸近的に最適性を満たす推定量の開発に取り組んだ。研究成果として、尤度比確率場に対する局所漸近正規性を証明することに成功し、その結果上記推定問題における推定量の最適な収束レートと漸近分散が、非整数 Brown 運動と観測誤差に対するそれぞれの差分系列の (a) 分散比の極限、(b) 正規化したスペクトル密度関数の比の原点での漸近挙動に現れる指数によって特徴づけられることを明らかにした。また最適収束レートを達成する推定量の開発にも成功し、更にその推定量を初期推定量としたワンステップ推定量が漸近的最適性を満たすことを尤度比確率場の局所漸近正規性を用いて証明することにも成功した。
- (6) (5) で得られた知見を用いることで、数理ファイナンス分野でセミマルチンゲール性と長期記憶性の性質を両立させるノイズとして関心を持たれている Mixed fractional Brownian motion に対しても、推定量の最適な収束レートと漸近分散の導出、最適収束レートを達成する初期推定量の構成およびワンステップ型推定量を用いた漸近的に最適な推定量を構成することに成功した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Tetsuya Takabatake
2. 発表標題 Local Asymptotic Normality Property for Fractional Brownian Motion with Measurement Error
3. 学会等名 The SH3 Conference on Econometrics (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Tetsuya Takabatake
2. 発表標題 Local Asymptotic Normality Property for Fractional Brownian Motion with Measurement Error
3. 学会等名 Computational and Methodological Statistics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 高島 哲也
2. 発表標題 ドリフトを持つ非整数Brown運動に対する疑似尤度解析
3. 学会等名 統計関連学会連合大会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 高島 哲也
2. 発表標題 連続観測に基づく非整数Ornstein-Uhlenbeck過程の局所漸近正規性
3. 学会等名 岡山確率論セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 高島 哲也
2. 発表標題 観測誤差を含む非整数Brown運動に対する局所漸近正規性
3. 学会等名 統計関連学会連合大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tetsuya Takabatake
2. 発表標題 Is Volatility Rough ?
3. 学会等名 EcoSta 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高島 哲也
2. 発表標題 観測誤差を含む非整数Brown運動に対する局所漸近正規性
3. 学会等名 第七回数理ファイナンス合宿型セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------