

令和 4 年 6 月 13 日現在

機関番号：22604

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2019～2021

課題番号：19K23226

研究課題名（和文）多変量接合関数の金融リスク管理への応用

研究課題名（英文）Application of multivariate copula to financial risk management

研究代表者

吉羽 要直（Yoshiba, Toshinao）

東京都立大学・経営学研究科・教授

研究者番号：20848428

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：金融リスク管理では、多数の資産価格変動で下落方向への従属性が高まる現象について、よく用いられる正規接合関数に代えて変量間の裾での従属性の強いt接合関数が用いられることがある。しかし、t接合関数では価格変動の上下方向の従属性を対称に捉えてしまう。本研究では、変量間の裾での強い従属性を捉えるとともに上下での非対称性も捉えられる非対称t接合関数などを取り上げた。それらの接合関数の性質と統計的推定方法について『統計数理』誌、極値での従属性について『日本統計学会誌』で公表した。また、3資産ポートフォリオの市場リスクへの応用について国内外の多数の研究集会で報告した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

金融ポートフォリオのリスク管理では、保有資産の価値が同時に下落することが大きなリスクであり、これを捉えられるような資産間の依存関係のモデリングが求められる。金融実務でよく用いられるモデリングは正規接合関数を用いたものであり、極端な同時下落や同時上昇を捉えられない。これに対し、実務では裾での依存性が強くなるt接合関数が用いられることがあるが、上昇方向よりも下落方向の依存性が強い現象は捉えられない。本研究は裾での依存性と非対称性を同時に捉えられる接合関数の構築や性質の理解を目指すもので、学術面でも実務面でも金融リスク管理での意義は大きい。

研究成果の概要（英文）：In financial risk management, tail dependent Student-t copulas, instead of popular Normal copula, are sometimes used to capture joint plunges of multiple assets. However, the Student-t copula captures the lower tail dependence symmetry with the upper tail dependence. In this study, we have proposed to use skew-t copulas which capture both the strength of the tail dependence and the asymmetry. We have published "Properties of skew-t copulas and their statistical estimation: Application to asset returns" on Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics, and "Tail dependence, tail asymmetry and credit portfolio risk" on Journal of the Japan Statistical Society. And we have reported "Value-at-risk and expected shortfall of stock portfolio using skew-t copulas" on several academic conferences at home and abroad.

研究分野：金融データサイエンス

キーワード：接合関数 裾従属性 非対称性 ポートフォリオリスク 誤方向リスク

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

2007～08年の国際金融危機では、多くの資産価格が同時に大幅に急落するという事象が生じ、世界の金融市場は既存の資産価格変動モデルは表現できない大きなストレスを経験した。こうしたストレスは、個別金融機関にとって脅威となっており、金融システム全体の安定を担う金融監督当局にとっても大きな懸念となっている。従来のリスク管理手法では、様々なリスクファクターに対して多変量の正規接合関数 (Gaussian copula) でモデル化されることが多く、ストレス時に強まる依存性が表現できていないという問題があった。近年こうした問題に対し、計量ファイナンス研究ではストレス時に強まる依存性を表現できる接合関数を利用した分析が進められてきている。特に Yoshida (2018)では、変量間の強い裾依存性と上下で非対称な依存性を同時に表現できる非対称  $t$  接合関数 (skew- $t$  copula) を取り上げ、その具体的な推定の計算手法を提案している。一方、変量間の相関行列が時間変化するモデルにより、その時点に応じたモデルを構築する考え方もある。こうした先端的なモデルを組み合わせることで、金融リスク管理の実務やシステミックリスクの把握に対し、より有益になるか検証することが本研究の問題である。金融リスク管理の実務やシステミックリスクの把握は、個別金融機関や金融監督当局にとって重要な課題である。

### 2. 研究の目的

Yoshida (2018)では、Demarta and McNeil (2005)で提案された非対称  $t$  接合関数に加え、多変量非対称  $t$  分布として学術的に最も利用されている Azzalini and Capitanio (2003)に基づいた接合関数の利用も視野に入れ、具体的な推定法を提案した。これは、Azzalini and Capitanio (2003)に基づいた非対称  $t$  接合関数の推定法を初めて正確に構築したものである。本研究の第1の目的は、前述の金融リスク管理上の問題意識に即した非対称  $t$  接合関数が、金融リスク管理の実務やシステミックリスクの把握に有効なものとなるのか、Yoshida (2018)の推定法を用いてリスクファクターの推定を行った後に、実務上用いられるポートフォリオの Value-at-Risk や期待ショートフォールなどのリスク指標のバックテストを通じて検証することである。本研究の第2の目的は、相関行列が時間変化する動的なモデルを Yoshida (2018)で取り上げた非対称  $t$  接合関数に適用したモデルの推定法を確立することである。第3の目的は、第1の目的で利用した相関行列が時間変化しない静的なモデルと第2の目的で構築した相関行列が時間変化する動的な非対称  $t$  接合関数モデルとを金融リスク管理の実務やシステミックリスクの把握への有効性の違いの観点から比較検証を行うことである。

### 3. 研究の方法

第1の目的とした非対称  $t$  接合関数の金融リスク管理上の有効性の検証について、具体的な実証分析として、TOPIX33業種の中から高相関あるいは低相関などの特徴的な3業種程度を選定して、株式ポートフォリオを組む。次に、各業種の日次データから Value-at-Risk や期待ショートフォールなどのリスク量を算出する。最後に、バックテストを行ってリスク量の精度を検証する。この実証分析については2018年までに分析した結果を用いて、国内外の数多くの研究集会で報告を行い議論することで分析を深めることとした。

第1の目的である相関行列が変化しない静的な非対称  $t$  接合関数モデルの金融リスク管理上の有効性検証とその報告を進めていく中で、当初、第2、第3の目的としていた相関行列が時間変化する動的な非対称  $t$  接合関数モデルとその有効性の検証を行う前に、Azzalini and Capitanio (2003)の多変量非対称  $t$  接合分布やそのモデリングの前段階に相当する多変量正規分布に非対称性を加えた多変量非対称正規分布の接合関数の性質について整理することにした。

### 4. 研究成果

第1の目的について、TOPIX33業種のうち3業種を選択してその業種別株価指数の日次変化率について非対称  $t$  接合関数で捉え、3業種の等ウェイトのポートフォリオのリスクを標準的な Value-at-Risk (VaR) や期待ショートフォール (ES) といったリスク指標を用いて検討した。本研究の成果については、国内外の研究集会で報告・議論した。研究助成が始まった2019年9月以降では、統計関連学会連合大会 (2019年9月)、日本ファイナンス学会秋季大会 (2019年11月)、Quantitative Methods in Finance (2019年12月)、京都大学数理解析研究所共同研究 (2020年9月)で報告を行ったほか、Stony Brook 大学で行われた New Ideas in Quantitative Finance Workshop (2019年11月)で招待講演を行った。これらの研究集会で得られた意見・議論をもとに2019年11月の日本ファイナンス学会秋季大会の予稿として準備した英語論文の修正を進めている。また、京都大学数理解析研究所講究録 No. 2173で「非対称  $t$  接合関数の性質・推定法とその応用」を公表した。

実証分析の結果を整理すると、以下のとおりである。まず、日次収益率のデータについて、そのまま用いることと、標準的な時系列モデルである GARCH(1,1)や EGARCH(1,1)でフィルタリングすることで2種類の周辺分布を準備した。次に、3つの株価指数の日次収益率あるいはフィルタリングした基準化残差について非対称  $t$  接合関数、 $t$  接合関数、正規接合関数を推定し、危機

時(2007年8月~2011年9月)と平時(2014年8月~2018年9月)とでバックテスト等のパフォーマンスを比較した。その結果、日次収益率のフィルタリングの有無や危機時・平時に依らず、非対称  $t$  接合関数が AIC や BIC といった情報量規準で選択される傾向にあった。また、EGARCH 等でフィルタリングした方が非対称性は強まる傾向が観察された。さらに、VaR や ES のパフォーマンスは周辺分布に関するフィルタリングの有無に大きく依存し、フィルタリングした場合で比較した場合には相対的に非対称  $t$  接合関数を用いたモデルのパフォーマンスが良かった。

関連する研究として、クレジット・デフォルト・スワップ(CDS)の信用リスク調整を念頭に接合関数を用いた誤方向リスク・モデリングを考察した研究について、作成した論文の修正を進め学術誌に投稿したほか、『オペレーションズ・リサーチ』誌での和文の解説原稿も執筆し、本邦の学界への啓蒙を図った(2020年7月)。英文学術誌に投稿した論文については、市場の取引価格データをもとに誤方向リスクを考慮した CDS の信用リスク調整のパラメータを校正すべきとの修正意見があったことから、2021年度に基盤研究(C) 21K01581 での独立基盤形成支援の助成を受けて市場取引価格データの整備を進めた。

第1の目的から派生した理論分析の深化については、共同研究集会「極値理論の工学への応用」で「非対称  $t$  接合関数の裾依存性」(2020年8月)、「2変量接合関数の極値での従属性」(2021年8月)を報告し、それぞれ共同研究レポート No.445, 454 で公表した。また、研究詳解「非対称  $t$  接合関数の性質と統計的推定方法」を査読付学術誌『統計数理』で公表した(吉羽(2020)、2020年6月)。さらに、金融リスク管理への幅広い応用を念頭に「極値での従属性および非対称性と信用ポートフォリオリスク」について分析を進め査読付学術誌『日本統計学会誌』で公表した(吉羽(2021)、2021年9月)。

吉羽(2021)では、評価例として1,000ローン、各ローンのデフォルト率5%、回収率40%、元本1のCLO(Collateralized Debt Obligation)プールについて、8種類の接合関数を想定して評価の比較を行った。接合関数のパラメータ設定は順位相関を等しく揃えて設定した。ただし、非対称正規接合関数、非対称  $t$  接合関数については、非対称性をゼロとした場合に同一の順位相関を持つパラメータで調整した。想定するCLOのトランシェは、エクイティが元本に対して最初の3%まで、ジュニアメザニンが3%から9%、シニアメザニンが9%から15%、残りの15%超をシニアが損失負担するとして、アタッチメント・デタッチメントを設定した。高相関  $\rho=0.24$  でCLOの各トランシェの期待損失率を100万パスのシミュレーションで評価すると、表1のような結果を得た。表1より、正規接合関数ならシニア債はほとんど毀損しないと評価されるが、他の裾従属性の強い接合関数では一定程度の毀損があると評価される一方、裾従属性が正規接合関数よりも弱いフランク接合関数では、シニアメザニン債も毀損しない。負の非対称性を付加した接合関数でもシニア債の毀損率は高い。この結果から、資産相関について過去の変動から推定し、正規接合関数あるいはより裾従属性の弱い接合関数でCLOトランシェの期待損失率を評価すると、シニアのトランシェになるほど期待損失率を低めに推定しまう可能性がある。この問題の回避には、下側裾従属性の強い接合関数や下側への変動に共通の非対称性を加えるモデリングが有効に機能し得ると結論付けた。

表1 各CLOトランシェの期待損失率

$\rho=0.24$	エクイティ	ジュニア メザニン	シニア メザニン	シニア
正規	58.8%	16.06%	3.48%	0.08%
$t(v=3)$	38.1%	16.29%	7.53%	0.50%
生存グンベル	59.8%	8.65%	3.57%	0.56%
クレイトン	38.1%	15.80%	7.35%	0.53%
フランク	57.0%	21.56%	0.00%	0.00%
非対称正規	45.9%	15.42%	6.08%	0.39%
AC 非対称 $t(v=3)$	26.6%	13.78%	8.25%	1.02%
GH 非対称 $t(v=3)$	25.8%	13.06%	7.88%	1.13%
参考: 独立 ( $\rho=0$ )	94.5%	2.74%	0.00%	0.00%

<引用文献>

Azzalini, A. and Capitanio, A. (2003), "Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew  $t$ -distribution," *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **65**(2), 367–389.

Demarta, S. and McNeil, A. J. (2005), "The  $t$  Copula and Related Copulas," *International Statistical Review*, **73**(1), 111–129.

Yoshihara, T. (2018), "Maximum likelihood estimation of skew- $t$  copulas with its applications to stock returns," *Journal of Statistical Computation and Simulations*, **88**(13), 2489–2506.

吉羽 要直 (2020), 「非対称  $t$  接合関数の性質と統計的推定方法 —資産価格変動への応用—」, 『統計数理』, **68**(1), 45–63.

吉羽 要直 (2021), 「極値での従属性および非対称性と信用ポートフォリオリスク」, 『日本統計学会誌』, **51**(1), 157–178.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 吉羽 要直	4. 巻 433
2. 論文標題 裾依存性とポートフォリオリスクの定量化について	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 共同研究レポート「極値理論の工学への応用（17）」	6. 最初と最後の頁 91～110
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 吉羽 要直	4. 巻 68
2. 論文標題 非対称t接合関数の性質と統計的推定方法 - 資産価格変動への応用 -	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 統計数理	6. 最初と最後の頁 45～63
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 安達 哲也, 末重 拓己, 吉羽 要直	4. 巻 65
2. 論文標題 接合関数を用いた誤方向リスクのモデリング	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 オペレーションズ・リサーチ	6. 最初と最後の頁 374～380
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 吉羽 要直	4. 巻 2173
2. 論文標題 非対称t接合関数の性質・推定法とその応用	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 1～17
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 吉羽 要直	4. 巻 445
2. 論文標題 非対称t接合関数の裾依存性: 同時デフォルト確率との関係を中心に	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 共同研究レポート「極値理論の工学への応用(18)」	6. 最初と最後の頁 49~62
掲載論文のDOI(デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 安達 哲也、末重 拓己、吉羽 要直	4. 巻 2106
2. 論文標題 非整数次フーリエ変換と接合関数を適用したジャンプ付き平方根過程に従う累積デフォルト強度分布での誤方向リスク・モデリング: クレジット・デフォルト・スワップに対する信用評価調整への応用	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 101~116
掲載論文のDOI(デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件(うち招待講演 4件/うち国際学会 3件)

1. 発表者名 吉羽 要直
2. 発表標題 非対称正規コピュラの裾非対称性尺度
3. 学会等名 2021年度統計関連学会連合大会(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 吉羽 要直
2. 発表標題 2変量接合関数の極値での従属性について
3. 学会等名 2021年度 共同研究集会「極値理論の工学への応用」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 吉羽 要直
2. 発表標題 非対称t接合関数の裾依存性: 同時デフォルト確率との関係を中心に
3. 学会等名 共同研究集会「極値理論の工学への応用」(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 吉羽 要直
2. 発表標題 非対称t接合関数の性質・推定法とその応用
3. 学会等名 2020年度 数理解析研究所 共同研究(公開型)「ファイナンスの数理解析とその応用」(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toshinao Yoshiba
2. 発表標題 Value-at-Risk and Expected Shortfall of Stock Portfolio Using Skew-t Copulas
3. 学会等名 SIAM Conference on Financial Mathematics & Engineering (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉羽 要直
2. 発表標題 裾依存性とポートフォリオリスクの定量化について
3. 学会等名 共同研究集会「極値理論の工学への応用」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉羽 要直
2. 発表標題 非対称t接合関数を用いたリスク管理
3. 学会等名 2019年度統計関連学会連合大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshinao Yoshiba
2. 発表標題 Value-at-risk and expected shortfall of stock portfolio using skew-t copulas
3. 学会等名 New Ideas In Quantitative Finance Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉羽要直
2. 発表標題 Value-at-risk and expected shortfall of stock portfolio using skew-t copulas
3. 学会等名 日本ファイナンス学会第1回秋季大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshinao Yoshiba
2. 発表標題 Value-at-risk and expected shortfall of stock portfolio using skew-t copulas
3. 学会等名 Quantitative Methods in Finance (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------