

令和 3 年 6 月 23 日現在

機関番号：14301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2019～2020

課題番号：19K23404

研究課題名(和文) Symplectic field theory の計算と応用

研究課題名(英文) computation and applications of symplectic field theory

研究代表者

石川 卓 (Ishikawa, Suguru)

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：70845742

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：完成した symplectic field theory の応用のため、その関手性やそこから得られる不変量についての研究を行った。symplectic field theory を構成するために用いた技術のうち、倉西構造の可微分性の証明に関する部分について、簡単な場合(Morse 理論の場合)に適用したものを論文の形で出し、説明を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Contact 多様体を調べるための道具として構成された symplectic field theory (SFT) であるが、まだその応用やそのための計算方法は十分調べられていない。symplectic 幾何学における Floer 理論がそうであったように、SFT から得られる不変量等が contact 多様体の性質の研究に重要な役割を果たすことが期待される。本研究ではそのための SFT の不変量の構成や計算方法の研究等を行った。

研究成果の概要(英文)：For the applications of symplectic field theory, I studied its functoriality and invariants. I wrote a paper about a technique used for the construction of symplectic field theory, the smoothness of Kuranishi structure, in the case of the construction of Morse theory.

研究分野：Floer theory やその応用

キーワード：symplectic field theory

1. 研究開始当初の背景

Symplectic field theory (SFT) は、Eliashberg, Hofer, Givental らが 2000 年ごろに導入した、contact 多様体やその間の symplectic cobordism に対する、Gromov-Witten 不変量や Floer homology の一般化である。このうちの一部である contact homology や、その他のさまざまな亜種に対しては構成や応用等様々な結果があった。一般の SFT については最近その構成を私が行ったが、その応用に関する結果はまだほとんどなかった。また、応用のためには SFT の具体的な計算や評価が必要になるが、非常に特殊な場合を除き、SFT の計算を行うこともできなかった。

一方で、SFT の一部である Contact homology や亜種である Embedded contact homology 等には様々な応用が知られていた。もともと Floer theory 等は symplectic 多様体に対して定義されたものであり、そこにおいて用いられた方法や応用が、contact 多様体の場合においてもこれらの理論に対して多く用いられている。Symplectic 多様体の場合に Floer homology 等から得られた不変量等の、これらの理論の場合のものもいくつか構成されており、それらの性質の証明や計算、そしてその応用も多くなされていた。

これらを踏まえ、SFT の場合にも同様の方法を適用し、この場合の対応する不変量の構成やその性質の証明、その計算や評価、そしてそれらを用いた contact 多様体や symplectic cobordism の性質の研究への応用を行うことがこれからの課題となっていた。

2. 研究の目的

SFT の応用の充実と、そのための計算、評価方法を探し出すことが本研究の目的であった。具体的に与えられた contact 多様体の SFT 全体を計算することは特殊な場合を除き非常に困難である。そのため、まずは SFT からさらに応用上重要と考えられる不変量を取り出したうえで、それらの計算、評価を行うことを目指した。SFT の雛形である symplectic 多様体の Floer theory では capacity やスペクトル不変量等様々な不変量を取り出され、それらから symplectic 多様体の性質の研究に応用されていた。そこで SFT の場合にも、これらの不変量に対応するものを構成し、それらの計算や評価を行うことを目指した。SFT の計算、評価は、直接定義から行うことはほぼ不可能である。SFT の一部である contact homology 等でこれまでに用いられた多くの方法は、種数 0 の pseudoholomorphic curve に対してのみ有効で、種数一般の pseudoholomorphic curve を扱う SFT にそのまま適用することはできず、その計算は一般に難しい。そこで、考えている contact 多様体に群作用がある場合などに、その群作用を考慮したうえでの SFT の構成方法(であって元の構成方法と同じものであることが証明できるもの)を考案し、その特殊な構成方法の性質等を用いて評価する、ということを考えている。(これは Reeb ベクトル場の定める flow がそのまま S^1 作用になる場合にはすでにできている。) また、contact 多様体たちに対する関手性に関しても、より研究を進め、それを用いて計算可能なものの結果から他の contact 多様体の場合を導き出す方法も模索する。これらが本研究の目的であった。

3. 研究の方法

SFT の計算、評価を、一般の構成方法において行われた定義通りに直接行うことはほぼ不可能である。これは、そもそも SFT の構成において、pseudoholomorphic curve の空間を摂動してから数を数える等の行程があり、それは理論としては可能でも実際にその摂動を手で行うことが難しいからである。現在計算が可能なものは Reeb ベクトル場が定める flow が全体として周期を持つ場合(この flow がある S^1 作用に一致する場合)のみであり、それ以外の場合に計算、評価を行うことは非常に難しい。そこで、SFT 全体の計算ではなく、その一部の計算、評価から応用を導くために、SFT から応用上重要と思われる不変量を構成し、それらを利用する、という方法を用いることにした。具体的にその不変量として考えているものは、symplectic 幾何学等でも応用されている capacity やスペクトル不変量である。これらのものを SFT に対して定義し、その性質や関手性を調べ、具体的な contact 多様体に対しての計算、評価に利用し、

そこから応用を模索する、という方針で行う。

一般の contact 多様体に対しての SFT やそこから得られる不変量の計算は困難であるが、群作用等の特殊な条件があればそこからさまざまな制約がかかり、計算や評価につながると考えられるので、まずはそういった多様体に対しての研究を行った。群作用のうち、Reeb ベクトル場が S^1 作用を生成している場合には SFT の構成の時点でその群作用を考慮した方法で行うことができ、そこから計算ができる。このように、より一般の群作用の場合にも群作用を考慮した構成方法を作ることができれば、そこから評価を得られると考えられる。

一般に、contact 多様体たちの中の symplectic cobordism が与えられたとき、その SFT の間の関手に近いものが構成される。この関手性と上の特殊な場合での結果を組み合わせ、より多くの場合に計算や応用を広げることを目指す。特に contact 多様体の surgery が定める symplectic cobordism の場合などに重点を置く予定であった。

4 . 研究成果

現時点でもまだ SFT の構成論文は査読がすんでおらず、その構成やそこに使われた技術自体あまり理解されているとはいえない。そこで、SFT の構成において用いられた技術の一つである、倉西構造の可微分性の証明に関する部分を、より簡単な場合である Morse homology の構成の場合に適用したものを論文として発表した。通常、Morse homology を構成する場合には Riemann 計量等に Morse-Smale 条件を課すことで、境界作用素を定義するための connecting orbit の数え上げができるようにするのだが、SFT を含むより高度な Floer homology 型の理論ではこれができず、代わりに virtual technique とよばれる技術のうちのいずれかを用いる必要がある。その一つが、symplectic 多様体の Floer theory 等でも用いられた倉西理論である。この理論では、次元が様々なベクトル束とその切断の組を構成し、その切断の零点集合の張り合わせとして connecting orbit の空間を表示する。(このように表示された空間を倉西空間とよび、この構造を倉西構造とよぶ。) これから代数や不変量を構成するにはその切断達を整合的な方法で摂動する必要があり、都合の良い摂動を行うためにはこの構造の可微分構造が必要になる。この倉西空間のうちの、境界や角といったそれぞれのパーツの中の可微分性は容易に示されるが、境界と内部の間にどのような可微分構造でつなげるのか、ということは非自明であり、実際には人工的に一つ可微分構造を入れてやる必要がある。これが整合的になることをどのように示すのか、といったことをこの論文では詳しく説明している。

SFT から得られる capacity やスペクトル不変量に関する研究は、現在も継続中であり、まだ論文等の形としては発表していない。群作用を持つ contact 多様体に対する SFT の研究についても同様である。これらについては研究を継続して行っていく予定である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ishikawa Suguru	4. 巻 -1
2. 論文標題 Smooth Kuranishi structure of the space of Morse trajectories	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-28
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-2021-0001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 0件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 石川卓
2. 発表標題 Construction of symplectic field theory
3. 学会等名 The 3rd Symposium in Geometry and Differential Equations
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石川卓
2. 発表標題 Construction of symplectic field theory and smoothness of Kuranishi structure
3. 学会等名 Conference on Fukaya Category and Homological Mirror Symmetry
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石川卓
2. 発表標題 Symplectic field theory の構成と倉西構造の可微分性
3. 学会等名 第66回幾何学シンポジウム
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------