

令和 4 年 6 月 1 日現在

機関番号：14401

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2019～2021

課題番号：19K23405

研究課題名(和文) グラフ上の準線形放物型偏微分方程式の解析的研究

研究課題名(英文) Mathematical analysis of quasilinear partial differential equations in metric graphs

研究代表者

岩崎 悟 (Iwasaki, Satoru)

大阪大学・情報科学研究科・助教

研究者番号：00845604

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：(1)具体的な準線形放物型偏微分方程式としてグラフ上のKeller-Segel方程式に対する時間大域解を構成することに成功し、その解が定常解に収束することも解析的に証明した。(2)グラフ上の半線形放物型偏微分方程式であるAllen-Cahn方程式の全域解のブロッキング現象に関する解析的な研究を行った。(3)グラフ上の方程式における逆問題にも着目して、制御工学における可観測性の観点から、グラフ上の熱拡散方程式システムにおける初期状態推定が可能となるための必要十分条件を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一つの具体的な準線形偏微分方程式に対する解の構成や収束定理の証明ができたため、これを足がかりとして一般論への展開が期待できる。グラフ上の偏微分方程式は、空間2次元や空間3次元のモデルの空間粗視化とも捉えられることが知られており、本研究を空間高次元複雑領域上の方程式の解析につなげることができるとも期待している。また、グラフ上の熱拡散方程式における初期状態推定の研究は、理想的な問題設定の下では有限次元のシステムを解析することが無限次元のシステムを解析することに直結するという事実を保証したのになっており、ネットワーク大規模システムにおける次元縮約に重要な知見を与えるものになっている。

研究成果の概要(英文)：(1)As for the Keller-Segel model equations in metric graphs, we prove the existence of global solutions and asymptotic convergence to a stationary solution.(2)As for the Allen-Cahn equations in metric graphs, we investigate the blocking phenomena of entire solutions.(3)As for the heat equations in metric graphs, we consider initial state estimation problems. Particularly, we are concerned with suitable placements of observation points in order to uniquely determine the initial state from observation data. We give a necessary and sufficient condition for suitable placements of observation points, and such suitable placements are determined from transition matrices of metric graphs.

研究分野：数学解析

キーワード：メトリックグラフ 偏微分方程式 反応拡散方程式 熱拡散方程式 状態推定問題

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

情報科学技術が発達した現代において「グラフ上のダイナミクス」というと、頂点上の状態変数の時間発展を辺を介するやり取りに基づいた連立差分方程式や連立常微分方程式で定式化したものを考えることが多いが、本研究課題では、各辺の中の状態変数の空間的な分布のダイナミクスまで考えたグラフ上の偏微分方程式を扱う。空間次元に着目するとグラフ上の偏微分方程式は一次元と高次元のメソスコピックな役割を担い、数学的には各辺上での偏微分方程式と各頂点上での接合条件の連立した問題となる。例えば、道路網上の交通量、梁にかかる力、送電網での電力、電気回路、血管内部の血流密度、グラフエン内の自由電子、などを解析するために、グラフ上の偏微分方程式による数理モデルは様々な分野・空間スケールで活用されてきた。これまでのグラフ上の偏微分方程式の解析における研究では、グラフ上の微分作用素の分数べきの特徴づけを活用できておらず、より複雑なシステムを表現可能なグラフ上の準線形放物型偏微分方程式の研究まで到達していなかった。

### 2. 研究の目的

研究開始当初の目的は、グラフ上の微分作用素の分数べきを十分に活用することによりどれほど一般的な準線形放物型偏微分方程式の局所解を構成することが可能か、さらに構成できた局所解について解のプロファイルをどれほど詳しく調べることが可能か、を明確化することであった。

### 3. 研究の方法

研究開始当初の研究方法は、角域作用素の純虚数べきの結果と、有界な  $H_\infty$  関数演算の結果を組み合わせるにより解決する方法を考えていた。そして、分数べきの理論と準線形抽象発展方程式の理論を組み合わせるにより、適当な非線形項のときに局所解が構成できると考えていた。また、定常問題は連立常微分方程式と接合条件を組み合わせた問題になる。つまり、この問題は常微分方程式の解析方法が大いに活用できる問題となっており、ロンスキー行列を用いた正値解を構成する議論や、シューティング法を用いた非定数定常解の存在や、その非定数定常解の安定性を調べるための Sturm-Liouville 型の固有値問題の議論を活用できると考えていた。よって、定常解については豊富な解のプロファイルを得ることができると期待していた。

### 4. 研究成果

本研究期間ではグラフ上の準線形放物型偏微分方程式を扱う一般論を構築することはできなかったが、具体的な準線形放物型偏微分方程式としてグラフ上の Keller-Segel 方程式に対する時間大域解を構成することに成功した。さらにそのシステムが持つ Lyapunov 関数が Lojasiewicz-Simon の勾配不等式を満たすことを証明することにより時間大域解が定常解に収束することも解析的に証明することができた。この研究結果は今回達成し得なかった準線形放物型偏微分方程式の解析にも今後つながる可能性のある研究結果となっている。

また、グラフ上の半線形放物型偏微分方程式である Allen-Cahn 方程式の解のブロッキング現象に関する解析的な研究・数値的な研究も行った。この研究ではグラフ上の偏微分方程式の全域解・定常解の詳細なプロファイルを知ること成功しており、グラフ上の偏微分方程式における解の詳細な挙動の理解を前進させた。これらの研究はより複雑な空間多次元領域上の反応拡散方程式の解構造を解明する研究に繋がる内容となっている。

一方で、研究開始当初の研究目的とは異なる視点であるが、グラフ上の偏微分方程式における状態推定問題にも着目した研究を行った。グラフ上の偏微分方程式における状態推定に関する既存研究では「グラフ上にセンサーを十分に配置できるという前提条件のもと」状態を推定する問題が研究されてきた。一方で本研究成果ではグラフ上の偏微分方程式の状態推定という無限次元の問題を、離散グラフ上の遷移行列の固有値問題という有限次元の問題に等価に変換することに成功して、遷移行列の解析から「状態推定のために必要なセンサーの最小の数とその場所」を完全に決定することができる枠組みを構築することができた(図1参照)。これらの結果は、理想的な問題設定の下では有限次元のシステムを解析することが無限次元のシステムを解析することに直結するという事実を保証したものになっており、ネットワーク大規模システムにおける次元縮約に重要な知見を与えるものになっている。また、この種の問題は水道管や送電線においてある箇所に異常が生じ、異常箇所から生じる音や熱などの異常値がその構造物内部を伝わり全体へ広がっていく状況において、複数点での異常値の時系列データから異常が発生した場所や時間を推定するという問題に繋がることを期待できる。

グラフ上の偏微分方程式の解析は総じて、空間2次元や空間3次元のモデルの空間粗視化とも捉えられることが知られており、本研究成果を空間高次元の解析につなぐことが期待される。

参考文献

- S.Iwasaki, "Asymptotic Convergence of Solutions of Keller-Segel Equations in Network Shaped Domains", *Nonlinear Analysis*, Vol.197, 111839, pp.1-28, 2020.  
 S.Iwasaki, "Initial state estimation from limited observations of the heat equation in metric graphs", *Inverse Problem*, Vo.38, No.3, pp.1-19, 2022.

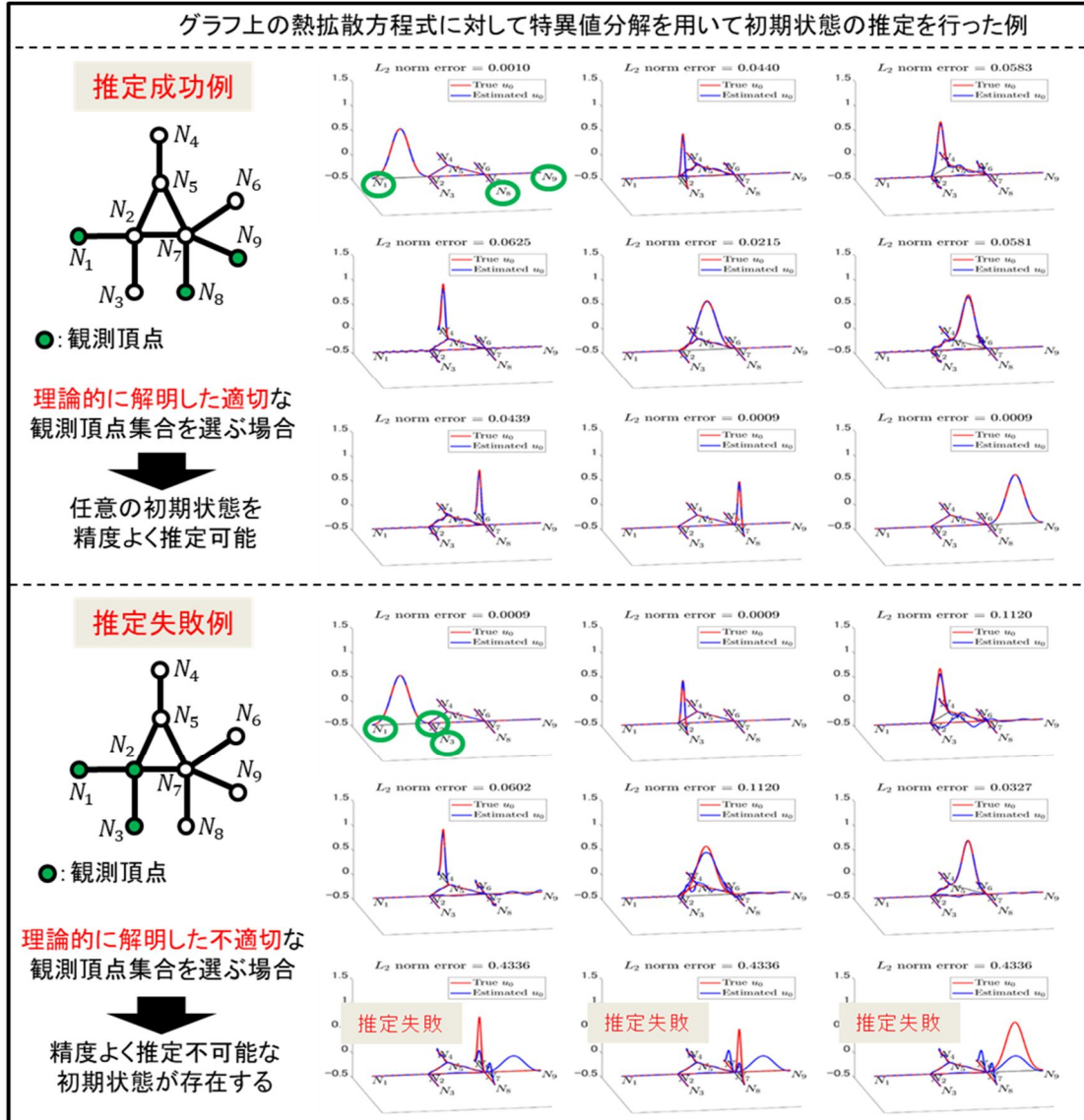


図 1 : グラフ上の熱拡散方程式における初期状態推定問題の数値例

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 4件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Iwasaki Satoru	4. 巻 2021
2. 論文標題 Observability for the Heat Equation in Equilateral Metric Graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proc. of 60th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)	6. 最初と最後の頁 1270--1275
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Iwasaki Satoru	4. 巻 38
2. 論文標題 Initial state estimation from limited observations of the heat equation in metric graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Inverse Problems	6. 最初と最後の頁 035007 ~ 035007
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1361-6420/ac4afc	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 岩崎 悟	4. 巻 35
2. 論文標題 メトリックグラフ上の偏微分方程式における特異値分解を用いた初期値推定	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 システム制御情報学会論文誌	6. 最初と最後の頁 62--67
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 岩崎 悟	4. 巻 64
2. 論文標題 メトリックグラフ上の熱拡散方程式と頂点観測システムにおけるapproximate observability	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 自動制御連合講演会講演論文集	6. 最初と最後の頁 623 ~ 627
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.11511/jacc.64.0_623	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Iwasaki Satoru	4. 巻 197
2. 論文標題 Asymptotic convergence of solutions of Keller-Segel equations in network shaped domains	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 1-28
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2020.111839	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 岩崎悟	4. 巻 178
2. 論文標題 グラフ上の走化性方程式の時間大域解の構成	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 北海道大学数学講究録：第16回数学総合若手研究集会：数学の交叉点	6. 最初と最後の頁 631-640
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14943/92424	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計25件(うち招待講演 8件/うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Satoru Iwasaki
2. 発表標題 Observability for the Heat Equation in Equilateral Metric Graphs
3. 学会等名 SICE Annual Conference 2021 (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Satoru Iwasaki
2. 発表標題 Existence and stability of standing waves of reaction-diffusion equations on an infinite metric graph
3. 学会等名 RIMS International conference: Modeling and Mathematical Analysis of Dynamics of Patterns (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Satoru Iwasaki
2. 発表標題 Standing waves of reaction-diffusion equations on an infinite metric graph
3. 学会等名 ReaDiNet 2021: An Online Conference on Recent Topics in Reaction-Diffusion System, Biology, Medicine and Chemistry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩崎悟
2. 発表標題 メトリックグラフ上の偏微分方程式における初期値推定問題
3. 学会等名 第65回システム制御情報学会研究発表講演会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩崎悟
2. 発表標題 等長な辺をもつメトリックグラフ上の熱拡散方程式の初期値推定問題
3. 学会等名 第34回さいたま数理解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩崎悟, 神保秀一, 森田善久
2. 発表標題 2頂点を持つメトリックグラフ上の反応拡散方程式の定在波の存在と安定性
3. 学会等名 第15回応用数理研究会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩崎悟, 神保秀一, 森田善久
2. 発表標題 メトリックグラフ上の反応拡散方程式のフロント定在波の存在と安定性
3. 学会等名 日本応用数学会年会 2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩崎悟
2. 発表標題 メトリックグラフ上の熱拡散方程式と観測システムにおける状態決定問題
3. 学会等名 日本応用数学会年会 2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩崎悟, 神保秀一, 森田善久
2. 発表標題 2頂点を持つメトリックグラフ上の反応拡散方程式のフロント定在波
3. 学会等名 日本数学会 2021年度秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩崎悟
2. 発表標題 ネットワーク状の構造物における異常検知に向けたメトリックグラフ上の偏微分方程式モデルを用いた解析
3. 学会等名 2021年度 日本鉄鋼協会 計測・制御・システム分野における産学若手交流セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩崎悟
2. 発表標題 不連続な導関数をもつ常微分方程式とメトリックグラフ上の反応拡散方程式の定常問題
3. 学会等名 RIMS 共同研究(公開型) 常微分方程式の定性的理論とその応用(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩崎悟
2. 発表標題 メトリックグラフ上の熱拡散方程式と頂点観測システムにおけるapproximate observability
3. 学会等名 第64回自動制御連合講演会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩崎悟
2. 発表標題 メトリックグラフ上の熱拡散方程式の状態推定と状態制御
3. 学会等名 数理解析若手交流会(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩崎悟, 神保秀一, 森田善久
2. 発表標題 メトリックグラフ上の反応拡散方程式の単峰定常解の存在と安定性
3. 学会等名 応用数学合同研究集会2021
4. 発表年 2021年



1. 発表者名 岩崎悟
2. 発表標題 メトリックグラフ上の制御付き熱拡散方程式における可制御性グラミアンの計算
3. 学会等名 2021年度 計測自動制御学会関西支部・システム制御情報学会シンポジウム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 岩崎悟
2. 発表標題 メトリックグラフ上のPDEシステムにおける効率的なセンサー配置問題
3. 学会等名 「動的システムの状態推定とデータからの学習およびその応用」研究会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 岩崎悟, 神保秀一, 森田善久
2. 発表標題 2頂点をもつ非有界なメトリックグラフ上の反応拡散方程式の単峰定常解
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 岩崎悟, 山口勇太郎
2. 発表標題 メトリックグラフ上のAllen-Cahn方程式の定常解個数について
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 岩崎悟
2. 発表標題 グラフ上の反応拡散方程式の時空間パターン解
3. 学会等名 異分野・異業種研究交流会2020
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 岩崎悟
2. 発表標題 メトリックグラフ上の反応拡散方程式に現れる時空間パターン解について
3. 学会等名 応用数学フレッシュマンセミナー 2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 岩崎悟
2. 発表標題 メトリックグラフ上のFitzHugh-Nagumo方程式における進行波解について
3. 学会等名 2020年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 岩崎悟
2. 発表標題 メトリックグラフ上の熱拡散方程式における逆問題
3. 学会等名 計測自動制御学会関西支部・システム制御情報学会シンポジウム
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩崎悟
2. 発表標題 メトリックグラフ上の反応拡散方程式の順問題と逆問題
3. 学会等名 明治非線型数理セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩崎悟
2. 発表標題 ネットワーク構造物内部の状態空間モデルの初期値推定問題
3. 学会等名 「動的システムの状態推定とデータからの学習およびその応用」研究会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩崎悟，八木厚志
2. 発表標題 Laplace reaction-diffusion方程式の時間大域解の定常解への収束
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------