

令和 4 年 5 月 2 日現在

機関番号：15201

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2019～2021

課題番号：19K23411

研究課題名（和文）ビッグデータ解析に応用可能な高連結度グラフの構成に関する微分幾何学的研究

研究課題名（英文）A Differential Geometric Research on the Construction of Highly Connected Graphs  
Applicable to Big Data Analysis

研究代表者

山田 大貴（Yamada, Taiki）

島根大学・学術研究院理工学系・助教

研究者番号：00847270

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は、グラフの結びつきの強さを示す不変量であるグラフの連結度を強めるグラフを構成することができる微分幾何学的手法を確立することを目的とし、新たなアルゴリズムの構築に関する理論の開拓に挑戦するものである。グラフの連結度は耐故障性を持つネットワーク設計問題など実社会の問題に広く応用されてきたが、近年はビッグデータの整備が進み、より規模の大きいグラフを扱うことが出てきた。そこで、リーマン幾何学において局所的な計算から多様体の構造を明らかにすることができるリッチ曲率に着目して研究を進めた。本研究結果は、3編の論文としてまとめられ、いずれも国際雑誌に掲載された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、申請者の構築した有向グラフ上の理論やコホモロジー論を用いることで、微分幾何学の概念であるリッチ曲率と組合せ論の概念である連結度を結びつける接合的研究に位置付けられるため、双方の学問分野において波及効果を及ぼす。また、ビッグデータの整備が進んでいる昨今において、効率的な解析手法を提案する本研究は学術領域だけでなく、実社会にも大きなインパクトを与える。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research is to establish a differential geometrical method that can construct graphs that strengthen graph connectivity, an invariant that indicates the strength of graph ties, and we challenge the pioneering theory of constructing new algorithms. The connectivity of graphs has been widely applied to real-world problems such as fault-tolerant network design problems, but recently, with the development of big data, it has become necessary to deal with larger graphs. In Riemannian geometry, we focused on Ricci curvature, which can obtain the structure of manifolds from local calculations. The results of this research have been summarized in three papers, all of which have been published in international journals.

研究分野：離散幾何学

キーワード：グラフ理論 リッチ曲率 連結度

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

高連結度グラフは幅広い分野で重要な役割を果たしており、これまで明らかになっている高連結度グラフの構成方法は、全ての2頂点に対する組合せ論的なアルゴリズムを用いている。しかし、ビッグデータの解析に要求されるような規模の大きなグラフに対して、組合せ論的なアルゴリズムを用いることは計算量が多くなるため非効率的である。こうした規模の大きなグラフの大域的性質を明らかにする際、局所的な計算から多様体の構造を明らかにできる微分幾何学の理論がよく用いられるが、高連結度グラフの構成に関して適用可能か不明である。

## 2. 研究の目的

本研究では、グラフ上のリッチ曲率を用いてグラフの連結度に関する不等式評価を得ることで、リッチ曲率と連結度との関係性を明らかにして、効率的に高連結度グラフを構成することができる微分幾何学的手法を確立することを目的とし、新たなアルゴリズムの構築に関する理論の開拓に挑戦する。

## 3. 研究の方法

本研究は、以下の3つの研究を統合することによって遂行される。

- (1). 単体的複体上のラプラシアンに関する研究
- (2). グラフ上のリッチ曲率に関する研究
- (3). 連結度のアルゴリズムに関する研究

## 4. 研究成果

「3. 研究の方法」に記載してある3つの研究についてそれぞれ研究成果を挙げる。

- (1). 単体的複体上のラプラシアンに関する研究

グラフの一般化である単体的複体上に定義されるラプラシアンの固有値に対し、これまでの結果よりも一般化した不等式評価を得ることに成功した。具体的にはまず、単体的複体上に新たな確率測度を与えることで、グラフ上のリッチ曲率を単体的複体上へ拡張した。次に、本来単体的複体上のラプラシアンは単体的複体の向きに依存するが、正則な単体的複体を考えることで向きづけを固定できることに注目し、単体的複体上のラプラシアンを単純な形へ変形した。こうした手順を踏むことで、これまでの証明方法を踏襲することができる。具体的な単体的複体もいくつか構成できたことで、リッチ曲率と単体的複体の構造がより可視化され、ビッグデータの解析に貢献できる。

## (2). グラフ上のリッチ曲率に関する研究

小澤龍ノ介氏(防衛大)と櫻井陽平氏(埼玉大)と共同研究を行い, 有向グラフに対して, ラプラシアンと比較定理やラプラシアン一般化である  $p$ -ラプラシアンに対して固有値評価を得ることに成功した. 有向グラフ上の距離は非対称であることから, 無向グラフに対する定理を拡張することは難しいと考えられていたが, グラフの各点上に非対称な平均曲率を定義することで, これまで不等式評価できなかった箇所を評価することができた. 加えて, この研究成果の応用として, 有向グラフ上の非対称な平均曲率を導入することで, 正のリッチ曲率を持つ有向グラフの最大直径定理が得られた. 本研究成果によって有向グラフにおいてもリッチ曲率の値が大きくなればなるほどグラフが密になっていることが明らかになった.

## (3). 連結度のアルゴリズムに関する研究

松八重泰輔氏(中央大)から実践的なアルゴリズム構築に向けて, 経済学の観点から助言を受けながら, グラフのマイヤーソン値に関する研究を行った. 加えて, 総合地球環境学研究所の金本研究室にて, プログラミング言語 Julia を用いて, ビックデータ解析を行い, 自身の「実データを用いた検証」に大きく貢献した.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Ozawa Ryunosuke, Sakurai Yohei, Yamada Taiki	4. 巻 -
2. 論文標題 Maximal diameter theorem for directed graphs of positive Ricci curvature	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Analysis and Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ozawa Ryunosuke, Sakurai Yohei, Yamada Taiki	4. 巻 59
2. 論文標題 Geometric and spectral properties of directed graphs under a lower Ricci curvature bound	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 142-177
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00526-020-01809-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Taiki Yamada	4. 巻 57
2. 論文標題 An estimate of the first non-zero eigenvalue of the Laplacian by the Ricci curvature on edges of graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 151-163
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.18910/73742	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 WATANABE Kazuyoshi, YAMADA Taiki	4. 巻 43
2. 論文標題 Relation between Combinatorial Ricci Curvature and Lin-Lu-Yau's Ricci Curvature on Cell Complexes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 25-45
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3836/tjm/1502179293	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 YAMADA Taiki	4. 巻 74
2. 論文標題 A CONSTRUCTION OF GRAPHS WITH POSITIVE RICCI CURVATURE	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 291-311
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2206/kyushujm.74.291	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 山田大貴
2. 発表標題 The lower bound of the eigenvalue of the Laplacian on simplicial complex by the Ricci curvature
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 山田大貴
2. 発表標題 Construction of the stable transaction network by using graphs with positive Ricci curvature
3. 学会等名 地球研セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山田大貴
2. 発表標題 Laplacian Comparison by the Ricci Curvature on Directed Graphs
3. 学会等名 数理計画問題に対する理論とアルゴリズムの研究
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------