様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　４ 月 １５ 日現在

機関番号：９４３０５
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2019～2022
課題番号：１９Ｋ２３４１３

研究課題名（和文）代数多様体のモチーフ理論の一般化に関する研究

研究課題名（英文）A generalization of the theory of motives of algebraic varieties

研究代表者
宮崎　弘安（Miyazaki, Hiroyasu）

日本電信電話株式会社ＮＴＴコミュニケーション科学基礎研究所・基礎数学研究P・研究主任

研究者番号：５０７９９７６５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：整数論の研究の多くは、代数多様体という幾何的な対象の研究に置き換えることができる。代数多様体の情報は、コホモロジーを用いることで、線形代数的なデータとして取り出すことができる。着目する情報に応じて、多種多様なコホモロジーが存在するものの、それらはモチーフと呼ばれる普遍的な対象により統一的に制御されると考えられている。実際、ホモトピー不変なコホモロジーを制御するモチーフの理論は既に構築され、華々しい成果を生み出している。
本研究では、従来のモチーフ理論をさらに一般化することで、ホモトピー不変でないコホモロジーをも制御しうる一般理論を構築し、実際に新しく制御されるコホモロジーの例を構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
モチーフ理論は、代数多様体のコホモロジーの組織的な分類を行うための枠組みとみなせる。各々のコホモロジーは代数多様体の一つの側面を観測する数学的装置だが、モチーフ理論でそれらを統合することにより、代数多様体の全体像が捉えられる。従来のモチーフ理論はホモトピー不変性をみたすコホモロジーを捉えるが、裏を返せば、それ以外の情報を失うという問題を抱えていた。本研究で構築したモジュラス付きモチーフ理論は、ホモトピー不変でないコホモロジーも制御可能であり、従来理論よりも理想的なモチーフに近いものである。本理論を用いれば、従来のモチーフ理論では見出せなかった代数多様体の新たな性質を明らかにできると期待される。

研究成果の概要（英文）：We can transform many problems in number theory into the study of algebraic varieties. Moreover, we can extract the information of algebraic varieties as linear-algebraic data by using cohomologies. Many cohomologies capture different information, but mathematicians have been expecting that a universal theory, called motive theory, canonically controls those different cohomologies. Indeed, Voevodsky found such a theory controlling "homotopy invariant" cohomologies, providing many fruitful results.
In this project, we constructed a generalization of the conventional theory of motives to control non-homotopy invariant cohomologies and also found examples of such cohomologies our new theory controls.

研究分野：数論幾何

キーワード：モジュラス付きモチーフ理論　モチーフ　モジュラス　ホモトピー不変性

１．研究開始当初の背景

数論幾何では整数論の問題を代数多様体という幾何的な対象に変換して調べる。代数多様体の性質を抽出するための主要な方法であるコホモロジーには、代数多様体の種類や、着目する性質に応じて多様な種類が存在する。数論幾何の創始者である Grothendieck は、多種多様なコホモロジーを統一的に制御する普遍的な理論として「モチーフ理論」の存在を予想した。

モチーフ理論は、射影的かつ滑らかな代数多様体上のコホモロジーについては Grothendieck 自身により構成された（純モチーフ理論）。その後、射影的という条件を外したモチーフ理論が花村、Levine、Voevodsky により独立に、異なる手法で提案されている（混合モチーフ理論）。本研究で着目する、「ホモトピー不変層」を基礎とする Voevodsky の理論は、層理論の持つ柔軟性を最大限活用することにより、華々しい成功を収めた [1]。Voevodsky は自身の理論を用いて Milnor 予想やその一般化である Bloch-加藤予想を証明し、フィールズ賞を受賞している。

しかし、Voevodsky の理論では「ホモトピー不変性」という性質を基盤として用いているため、当該性質を満たさないコホモロジーを制御できないという問題を抱えている。構造層のコホモロジーやホッジコホモロジー、p 進コホモロジー等の重要なコホモロジー群はホモトピー不変でないため、Voevodsky の理論で制御することはできない。

２．研究の目的

本研究課題の目的は、Voevodsky の従来のモチーフ理論が抱える弱点を根本から克服する理論を構築することであった。従来の理論が抱える問題は、ホモトピー不変性を理論の出発点に据えていることに由来している。したがって、Voevodsky の理論を部分的に改変するだけでは、上記の課題に本質的な解決を与えることはできない。そこで本研究課題では、Voevodsky のモチーフ理論全体を根底から一般化することによって、ホモトピー不変性を満たさないコホモロジーをも制御しうるモチーフ理論を構築することを目標として研究を推進した。

３．研究の方法

本研究課題に先立ち、ホモトピー不変層の一般化として「相互層」の概念が Kahn-斎藤-山崎により提出されていた。相互層は、代数多様体の構造層や、代数的微分形式の層、de Rham-Witt 複体といった（ホモトピー不変性を満たさない）重要な層のクラスを含む。このことから、ホモトピー不変層の代わりに相互層を用いてモチーフ理論を再構成することができれば、上記の課題を克服する理論を構築できると期待される。以上が本研究課題の出発点となったアイディアである。

しかしながら、相互層はホモトピー不変層と比べて定義が複雑であり、性質の解析が困難であるという問題を持つ。本研究では、相互層を直接取り扱う代わりに、「キューブ不変層」の理論を構築することにより、上記困難を克服してモチーフ理論を一般化するという方法をとった。キューブ不変層は、相互層のある種の「モデル」であり、相互層よりも（少なくともアプリオリには）多くのデータを持つが、その定義はホモトピー不変層に類似しているため、Voevodsky の従来の議論の多くを（新たに生じる技術的課題は多数あるものの）踏襲できるという利点がある。

４．研究成果

本研究課題の成果は以下の４点である。上述の研究目標は、初めの３つの成果により達成することができた。４つ目の成果は当初の研究目標を超えて推進した研究の成果である。

（１）モジュラスペア上の位相の理論の構築（参考文献[2]）

本研究課題の目標であるモチーフ理論の一般化において、最大の技術的な核は、代数多様体上の層理論（ホモトピー不変層）を、モジュラスペア上の層理論（キューブ不変層）に置き換えることである。モジュラスペアは、代数多様体とその上の余次元１の部分多様体（カルティエ因子）の組として定義され、代数多様体のコンパクト化と無限遠境界の組を典型例として持つ。単に代数多様体のみを考えるのではなく、その無限遠境界の情報を（重複度も含めて）制御しつつ理論を構築することで、関数の極の台や重複度といった、より深い情報を捉えることが可能になる。

一般に、なんらかの圏の上の層の理論を構築するためには、その圏の上に Grothendieck 位相を定める必要がある。そこで本課題ではまず、モジュラスペアのなす圏の上の Grothendieck 位相

であって、代数多様体上の従来の位相と適切な意味で整合的なものを構成した。Grothendieck 位相は典型的には「大域的」な幾何学的対称の「局所的」な対象による被覆のデータとして与えられるが、モジュラスペアに現れる代数多様体のコンパクト化はそれ自体が大域的な対象であるため、「大域的な対象を大域的な対象で被覆する」という一見奇妙な状況を考えることになる。しかし、それにもかかわらず性質の良い位相を定義可能であるということが、本研究課題における重要なブレイクスルーであった。
本研究成果は、単著論文として査読付き国際論文誌で出版済みである[2]。

（２）モジュラスペア上の層の理論の構築（参考文献[3],[4],[5]）

モジュラスペア上の Grothendieck 位相を定めることに成功したことにより、モジュラスペア上の層の理論の構築に着手することが可能となったため、これについての連続論文２編を Kahn-斎藤-山崎と共同で査読付き国際論文誌において出版した[4],[5]。層の定義そのものは、（１）で構成した位相から直ちに導かれるものの、その層が良い性質を持つかどうかは全く非自明である。上記の連続論文では、モジュラスペア上の層の圏が Grothendieck アーベル圏になっていること、及びそれが生成する導来圏の射集合のなすアーベル群が、通常の代数多様体のコホモロジー群の順極限として計算できることを証明した。

上記の事実の証明には、次の幾何学的な結果が必要となる：代数多様体のある種の被覆（Nisnevich 被覆）は、代数多様体上のコンパクト化上の被覆に（必要ならコンパクト化を取り替えることにより）延長可能である。この結果は Kahn 氏との共同研究で得られた成果であり、上述の連続論文とは独立に、査読付き国際論文誌で出版した[3]。

（３）モジュラス付きモチーフ理論の構築（参考文献[6],[7]）

上記の（１）（２）で整備したモジュラスペア上の位相及び層の理論を用いることで、Voevodsky のモチーフの圏を忠実充満部分圏として含む、モジュラス付きモチーフの圏を構築することに成功した。さらに、Voevodsky のモチーフが満たしていた種々の結果をモジュラス付きモチーフに対して一般化し証明した[6]。
この結果については Kahn-斎藤-山崎との共著論文として査読付き国際論文誌で出版済みであり、また国内外の研究集会で報告済みである。これにより、Voevodsky の理論の抜本的な一般化という、本研究課題の目標を達成することができた。

さらに、上記の論文は（Voevodsky の理論が当初そうであったように）体上のモジュラスペアに対する理論のみを取り扱っているが、その後、Kelly との共同研究において一般の底上においてもモジュラス付き層の理論が展開可能であることも確かめられた。本研究成果は、当初の研究目標を超える成果であり、プレプリントの段階ではあるが arXiv 上で公開済みである[7]。

（４）モジュラス付きモチーフ理論の応用（参考文献[8]）

モジュラス付きモチーフ理論の基礎理論が（１）～（３）において構築されたため、本研究課題の残りの期間においては、モジュラス付きモチーフ理論の応用研究及び、理論の基盤整備に取り組んだ。その結果、下記の成果を得ることに成功した。

（a）De Rham-Witt 複体のモチーフ的な新たな構成
（b）構造層のコホモロジー（より一般に、微分形式の層のコホモロジー）の実現関手の構成

(a)について：De Rham-Witt 複体は p 進コホモロジーを生み出す数論幾何の重要な研究対象であるが、その定義は多数のデータに依存しており、その複雑さのために解析が困難である。本研究では、小泉と共同で、モジュラス付き層の概念を用いて、de Rham-Witt 複体（のモジュラスペア上のモデル）を、Witt 群と複数の乗法群（のモジュラスペア上のモデル）のテンソル積として表示することに成功した。さらに、de Rham-Witt 複体上の種々の代数構造が、Witt 群や乗法群のモデルに現れる射影直線の自己射によって表現されることも証明した。これらの成果は、de Rham-Witt 複体の幾何学的な新たな特徴づけが得られたことを意味し、p 進コホモロジーの研究に多くの応用をもたらすと期待される。
本成果については、プレプリントを arXiv に公開すると同時に、査読付き国際論文誌に投稿済みである[8]。

（b）について：構造層のコホモロジーは、数論幾何及び代数幾何における最も基本的かつ重要なコホモロジー理論であるにもかかわらず、ホモトピー不変性を満たさないため、従来のモチーフ理論では制御することができない。本成果では、モジュラス付きモチーフの圏からの構造層のコホモロジー（及び、微分形式の層のコホモロジー）の実現関手を構成した。これにより、モジュラス付きモチーフ理論が当該コホモロジーを制御すること、特に、Voevodsky のモチーフ理論よりも真に広いクラスのコホモロジーを制御することを確認することができた。
本成果については、プレプリントを現在取りまとめており、近日中に arXiv に公開すると同時に、査読付き国際論文誌に投稿予定である。

上記(a)(b)の成果により、モジュラス付きモチーフ理論が実際にホモトピー不変でない重要なコホモロジーを制御する理論であることが確かめられた。今後の研究においては、さらに多くのコホモロジーの制御を試みる。また、従来はモチーフ理論の射程外だった各種コホモロジーに一般化モチーフ理論を適用することによって、これらのコホモロジーに対するモチーフ理論的な全く新しいアプローチが可能と期待されるため、その研究にも取り組む予定である。

[1] V. Voevodsky, et al. *Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories. (AM-143)*. Princeton University Press, 2000.

[2] H. Miyazaki, *Nisnevich topology with modulus*, Annals of K-theory, Vol. 5 (2020), No. 3, 581-604.

[3] B. Kahn, H. Miyazaki, *Topologies on schemes and modulus pairs*, Nagoya Mathematical Journal, 244 283-313, Dec, 2021.

[4] B. Kahn, H. Miyazaki, S. Saito, T. Yamazai, *Motives with modulus, I: Modulus sheaves with transfers for non-proper modulus pairs*, Épijournal de Géométrie Algébrique, Volume 5 (2021), Article Nr. 1, 1-62.

[5] B. Kahn, H. Miyazaki, S. Saito, T. Yamazai, *Motives with modulus, II: Modulus sheaves with transfers for proper modulus pairs*, Épijournal de Géométrie Algébrique, Volume 5 (2021), Article Nr. 2, 1-40

[6] B. Kahn, H. Miyazaki, S. Saito, T. Yamazai, *Motives with modulus, III: The categories of motives*, Annals of K-theory, 7 119-178, 2022.

[7] S. Kelly, H. Miyazaki, *Modulus sheaves with transfers*, preprint, arXiv:2106.12837, 2021.

[8] J. Koizumi, H. Miyazaki, *A motivic construction of the de Rham-Witt complex*, preprint, arXiv:2301.05846, 2022.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計6件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　4件／うちオープンアクセス　5件）

1．著者名 Bruno Kahn, Hiroyasu Miyazaki, Shuji Saito, Takao Yamazaki	4．巻 7
2．論文標題 Motives with modulus, III: The categories of motives	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Annals of K-theory	6．最初と最後の頁 119-178
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/akt.2022.7.119	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1．著者名 Yuji Hirono, Takashi Okada, Hiroyasu Miyazaki, Yoshimasa Hidaka	4．巻 3
2．論文標題 Structural reduction of chemical reaction networks based on topology	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Physical Review Research	6．最初と最後の頁 43123
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1103/physrevresearch.3.043123	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Bruno Kahn, Hiroyasu Miyazaki, Shuji Saito, Takao Yamazaki	4．巻 5
2．論文標題 Motives with modulus, I: Modulus sheaves with transfers for non-proper modulus pairs	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Epijournal de Geometrie Algebrique	6．最初と最後の頁 epiga:7114
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.46298/epiga.2021.volume5.5979	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1．著者名 Bruno Kahn, Hiroyasu Miyazaki, Shuji Saito, Takao Yamazaki	4．巻 5
2．論文標題 Motives with modulus, II: Modulus sheaves with transfers for proper modulus pairs	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Epijournal de Geometrie Algebrique	6．最初と最後の頁 epiga:7115
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.46298/epiga.2021.volume5.5980	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1．著者名 Hiroyasu Miyazaki	4．巻 5
2．論文標題 Nisnevich topology with modulus	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Annals of K-theory	6．最初と最後の頁 581-604
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/akt.2020.5.581	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Bruno Kahn, Hiroyasu Miyazaki	4．巻 244
2．論文標題 Topologies on schemes and modulus pairs	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6．最初と最後の頁 283-313
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/nmj.2020.15	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計11件（うち招待講演　9件／うち国際学会　5件）

1．発表者名 Hiroyasu Miyazaki
2．発表標題 On some generalizations of motives with modulus
3．学会等名 Motives, quadratic forms and arithmetic（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名 Hiroyasu Miyazaki
2．発表標題 On reciprocity sheaves and a motivic analogue of the Hasse-Arf theorem
3．学会等名 Seminaire de theorie des nombres de l'IMJ-PRG（招待講演）
4．発表年 2022年

1．発表者名 宮崎弘安
2．発表標題 一般底上のモジュラス付きモチーフ理論について
3．学会等名 第21回仙台広島整数論集会
4．発表年 2022年

1．発表者名 Hiroyasu Miyazaki
2．発表標題 On a generalization of motives
3．学会等名 慶応代数セミナー（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 宮崎弘安
2．発表標題 一般ベース上のモジュラス付きモチーフ理論
3．学会等名 第21回仙台広島整数論集会
4．発表年 2022年

1．発表者名 Hiroyasu Miyazaki
2．発表標題 Recent development of the theory of motives with modulus (tentative)
3．学会等名 Motives, quadratic forms and arithmetic（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

１．発表者名 Hiroyasu Miyazaki
２．発表標題 On Nisnevich topology with modulus
３．学会等名 Motivic Hopf Equations seminar （オスロ大学・オンライン開催）（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2020年

１．発表者名 Hiroyasu Miyazaki
２．発表標題 On motives with modulus
３．学会等名 Mathematics-String theory Seminar, Kavli IPMU（招待講演）
４．発表年 2020年

１．発表者名 Hiroyasu Miyazaki
２．発表標題 Homotopy property for algebraic cycles with modulus
３．学会等名 Algebraic Geometry Seminar, KAIST, Republic of Korea（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Hiroyasu Miyazaki
２．発表標題 On algebraic cycles with modulus
３．学会等名 Keio University Workshop 2019 (Number Theory), Boston University（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Hiroyasu Miyazaki
２．発表標題 On algebraic cycles with modulus
３．学会等名 Keio University Workshop 2019 (Number Theory), Boston University（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Researchmap https://researchmap.jp/hiroyasu_miyazaki

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	カーン　ブルーノ (Kahn Bruno)		
研究協力者	斎藤　秀司 (Saito Shuji)		
研究協力者	山崎　隆雄 (Yamazaki Takao)		

6．研究組織（つづき）

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	ケリー　シェーン (Kelly Shane)		
研究協力者	小泉　淳之介 (Koizumi Junnosuke)		

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	IMJ-PRG			