

令和 6 年 6 月 26 日現在

機関番号：12601
研究種目：国際共同研究加速基金（国際共同研究強化(A））
研究期間：2019～2023
課題番号：19KK0345
研究課題名（和文）フリップの停止問題の研究

研究課題名（英文）Study of termination of flips

研究代表者

権業 善範（GONGYO, Yoshinori）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：70634210

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 9,000,000円

渡航期間： 6ヶ月

研究成果の概要（和文）：ソルトレイクシティに滞在はじめ最初の数ヶ月はC. Hacon氏らとMaximal variationのlog版やa-log canonical thresholdとTermination of flipsなどの議論を行い非常に順調であった。その後、アメリカも非常事態宣言に突入し、ソルトレイクシティにいながらもZoomによる議論を繰り返すこととなった。しかし、その中でもアバundance予想やそれにまつわる拡張定理などについて何度も議論を重ねた。さらにフリップの停止問題についてもいくつかの着想を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

フリップの停止問題やアバundance予想は重要な未解決問題であり、その解決は他分野での応用への影響も大きい。そういう意味でも重要な部分の研究を仕事をしていると自負している。またその解決に向けて派生する問題もたくさんあり、それが代数幾何学自体の発展につながると思う。

研究成果の概要（英文）：During the first few months of my stay in Salt Lake City, I had very good discussions with C. Hacon and others on the log version of Maximal variation, a-log canonical threshold, and termination of flips. After that, the United States also declared a state of emergency, and while I was in Salt Lake City, we had to repeat discussions via Zoom. However, we had many discussions on the abundance conjecture and related extension theorems. I also got some ideas on the termination problem of flips.

研究分野：代数幾何学

キーワード：MMP アバundance予想

1. 研究開始当初の背景

BAB 予想の解決を受けて、フリップの停止問題の解決が現在の技術で現実的に解決可能であろう問題であろうという認識が強くなってきており、それを解決することが最優先課題となっている。フリップの停止問題は高次元代数幾何学における極小モデルプログラムの完成を意味し、その解決により高次元多様体の分類論はより整備され、理解が深まることは間違いない。そのため世界中のトップの研究者の意見、アイデアを統合しつつ、自分の方法を融合しつつその問題の早期解決の目指したい。もちろん本当に今すぐにそのような必要性があるのか?という疑問があるかもしれない。しかし、こういうのはいち早く着手し、情報を収集し現状を理解し、いち早く解決しようと試みるのが大切だという認識である。

2. 研究の目的

本国際共同研究の目的は、フリップの停止問題を目指し、それに必要であろう極小対数的食い違い係数(MLD)及び対数的標準閾値(LCT)の亜種の有界性および離散性を局所理論と大域理論の結び付けの技術を駆使してその解決を目指す。ここでいう局所理論は特異点の理論であり、大域的理論は多様体の全体をみた構造を調べることを意味する。手法および計画としては、大域理論を十分に理解してひとつ高い次元の局所理論に適用する。それにより MLD 及び LCT の亜種の性質を調べる。また必要があれば同じ次元の局所理論を大域理論に適用することにより、次元についての数学的帰納法を組んで、一般次元の場合に定理を証明するための技術を開発する。

3. 研究の方法

基課題研究の計画と方法は、標準的な錐構成から出発して、局所理論で起こっていることを大域理論で、またはその逆を解釈する。(A)と(B)については、まず双有理幾何学における特異点の不変量である極小対数的食い違い係数(MLD)の研究を大域的幾何におけるファノ多様体の幾何を用いてアプローチする。特にファノ指数と呼ばれる不変量との関係を明らかにしていき、最終的には MLDのACCと下半連続性を調べる。(C)では特異点の”複雑度(Complexity)”という不変量に対してCox環の射影スキームを通じて局所大域対応を展開する。(D)では、自己射を持つ代数多様体について調べる。ここで最初に基課題研究手法として全体を通じて共通している見方の「率直な局所大域対応」の説明を行っておく。まず率直に局所大域対応を考えることだが、射影代数多様体 X とその上の豊富因子 H から特異点を作ること。これは少しでも代数幾何学を学んだ人間なら当然知っている方法で、 H についての切断環のアフィンスキームとその次数が正の部分の極大イデアルを考えることである。これはいま標準的錐構成と呼ぶ。特に大抵の場合 H を何倍かの H を考えることで、その切断環は正規であると仮定してよい。このときこの錐がある因子との対が川又対数的端末(または対数的標準)対であることは、元の X とある因子との対が対数的ファノ(またはカラビ・ヤウ)であることと同値である。この視点から容易にさまざまな予想や問題が局所と大域を行き来することができる。またこの錐の次元は $\dim X + 1$ であることに注意する。これは次元についての数学的帰納法を考えると非常に役に立つ。つまり n 次元の大域的なものを仮定し、 $n+1$ 次元の局所的な問題を解決する。さらにそれを用いて $n+1$ 次元の大域的なものを証明する。ここで問題となるのは、ふたつである。(a)錐以外の特異点の場合をどう扱うか?と(b)等次元の局所から大域への方向をどう解決するか?前者はある程度、極小モデル理論の手法を用いることで、錐に似た形までももっていくことができるが、すべての問題が一様にアプローチできるわけではない。また後

者は問題によって全くアプローチが異なってくると言ってよいだろう。基課題の研究の進捗状況を述べる。中村勇哉氏との共同研究で極小食い違い係数の研究を行った。極小食い違い係数の逆同伴および下半連続性について研究を行ったが、まだ解決にはいたらなかった。しかし、ある場合の現在知られているジェットスキームの理論を用いた結果をジェットスキームを使わずして特異点解消の応用でのみ示すことができたことが進歩であったといえる。

さらにBirkar氏のBorisov--Alexeev--Borisov予想の証明を再検証し、対数的標準閾値(LCT)のACC(これはHacon--Mckernan--Xuによりすでに知られていた)定理と同時に 数学的帰納法を組むことで、より数学的帰納法がシンプルに回ることを確認した。またSung Rak Choi氏とBatyrevの動的錐に対する錐定理を一般の高次元を動く曲線に対するものに拡張を試みた。現在 preprintを準備中である。この研究には先のBorisov--Alexeev--Borisov予想と関連している。実際我々が考えている錐定理を完全な形で証明するためには、ある種の相対化されたBorisov--Alexeev--Borisov予想が必要であると思われるがそれが何なのかまだ解明できていない。それが今後の課題であり、これは極小食い違い係数の有界性に関するものと関連していると思っている。Choi氏との共同研究は当初予定していなかった研究であるが、Borisov--Alexeev--Borisov予想の相対化と関連していて非常に重要な着眼点を与えていると思っている。Borisov--Alexeev--Borisov予想の相対化はある意味フリップの有界性と関係するものであるので、特にそれは、ACC予想と関連すると思われる。

4 . 研究成果

コロナ禍ということもあり、非常に厳しい環境にあった。実際、ソルトレイクシティに滞在ははじめ最初の数ヶ月はC. Hacon氏らとMaximal variationのlog版やa-log canonical thresholdとTermination of flipsなどの議論を行い非常に順調であった。その後、アメリカも非常事態宣言に突入し、ソルトレイクシティにいながらもZoomによる議論を繰り返すこととなった。家族のこともあり、一時帰国して、その後再びコロナ禍の真っ最中に再び渡米したが、やはり基本的に現地にいながらもZoomによる議論となり作業効率は落ちてしまった。

しかし、その中でもアバundance予想やそれにまつわる拡張定理などについて何度も議論を重ねた。さらにフリップの停止問題についてもいくつかの着想を得ることができた。コロナ禍にまつわるさまざまな事情で当初の予定より、滞在が当初より短くなってしまったので、帰国後その代替滞在期間を探したが、教育業務・家庭の事情、さらには滞在予定直前の急病による滞りのキャンセルなどが度重なりそれを実行することが難しくなった。その度に、予定していた議論はオンラインを通じて行ったので、それ一定の成果は得られたと思う。まだまとまった形になっていないが、数年で発表できる形にするつもりである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Sung Rak Choi and Yoshinori Gongyo	4. 巻 300
2. 論文標題 On a generalized Batyrev's cone conjecture	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Math. Z.	6. 最初と最後の頁 1319--1334
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Y. Gongyo, Y. Nakamura, H. Tanaka	4. 巻 21
2. 論文標題 Rational points on log Fano threefolds over a finite field	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Eur. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 3759, 3795
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/JEMS/913	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Ejiri, Y. Gongyo	4. 巻 155
2. 論文標題 Nef anti-canonical divisors and rationally connected fibrations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Compos. Math.	6. 最初と最後の頁 1444, 1456
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/S0010437X19007383	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Gongyo, S. Takagi	4. 巻 5
2. 論文標題 Kollar's injectivity theorem for globally F-regular varieties	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Eur. J. Math	6. 最初と最後の頁 872, 880
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40879-018-0230-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 CHEN Weichung, GONGYO Yoshinori, NAKAMURA Yusuke	4. 巻 76
2. 論文標題 On generalized minimal log discrepancy	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 393, 449
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/90119011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計13件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 高次元極小モデル理論の構築とその応用
3. 学会等名 2023 年度日本数学会年会代数学賞受賞講演 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 Recent development of the minimal model theory,
3. 学会等名 京都大学理学部数学教室談話会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 Minimal model program (Expository talks)
3. 学会等名 interactions of new trends in Algebraic Geometry and Singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 アバんだンス予想の最近の進展
3. 学会等名 名古屋大学代数幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 Nef anti-canonical divisors and rationally conncted fibrations
3. 学会等名 AG seminar at UCLA (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 On a generalized Batyrev ' s cone conjecture
3. 学会等名 Zoom Algebraic Geometry seminar
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 A generailization of Batyrev ' s cone conjecture
3. 学会等名 Zoom Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 Nef anti-canonical divisors and rationally connected fibrations
3. 学会等名 UCL AG seminar (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 有効消滅性と向井型予想について
3. 学会等名 京都大学代数幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 The Mukai type conjecture
3. 学会等名 Recent development in Algebraic Geometry, Arithmetic and Dynamics (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 向井型の射影空間の積の特徴づけの予想
3. 学会等名 代数幾何学城崎シンポジウム (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 Effective non-vanishing and Mukai type conjecture
3. 学会等名 新潟代数シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 向井型の射影空間の積の特徴づけの予想
3. 学会等名 湯布院代数幾何学ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Y. Gongyo's webpage
<https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~gongyo/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
	ヘーコン クリストファー (Hacon Christopher)	ユタ大学・Department of Mathematics・distinguished professor	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	The University of Utah			