1版

様　式　Ｆ－１９－２

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　６ 年　　５ 月 ３０ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：国際共同研究加速基金（国際共同研究強化(A)）
研究期間：2021～2023
課題番号：１９ＫＫ０３４８
研究課題名（和文）非可換代数幾何学

研究課題名（英文）Noncommutative algebraic geometry

研究代表者
大川　新之介（Okawa, Shinnosuke）

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：６０６４６９０９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　9,100,000円
渡航期間：　11ヶ月

研究成果の概要（和文）：射影平面を一般の位置にある6点で爆発して得られる代数曲面は3次元射影空間内の3次曲面と同型になる。逆に、後者は必ずこの方法で構成されるが、6点の配置には複数の可能性があり、それはちょうどE6型Weyl群作用の軌道に一致する。本共同研究では、この代数幾何学の記念碑的かつ古典的な結果を非可換代数多様体へ一般化した。すなわち、与えられた3次元非可換射影空間内の3次曲面を非可換射影平面の6点爆発として記述することに成功した。主結果は、後者のモジュライ空間から前者のモジュライ空間への``全空間写像''を特定するという形で定式化された。さらに、準古典極限として得られるPoisson幾何学も解明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究課題は2000年頃には認識されていた、非可換射影幾何学の重要な問題の一つであった。今回、モジュライ空間の間の有理射を同定するという形で完全解決できた。主結果の定式化の方法、また、直線のHilbert schemeを利用した証明の手法共に、画期的であった。さらに、この結果により、他の次数の非可換del Pezzo曲面の反標準線型系の幾何学を研究する筋道も立った。加えて、非可換代数多様体を調べるうえで対応するPoisson幾何学に注目することの重要性が明らかになったという点も、手法面において重要な発見であったと考えている。

研究成果の概要（英文）：The algebraic surface obtained by blowing up the projective plane in 6 points in a general position is isomorphic to a cubic surface in a 3-dimensional projective space. Conversely, all (nonsingular) cubic surfaces are always constructed in this way. Moreover there is arbitrariness in the configuration of the 6 points which yield the given cubic surface, which coincides exactly with the orbit of an action of the Weyl group of type E6. In this joint work we generalize this monumental classical result of algebraic geometry from the 19th century to noncommutative algebraic varieties. Namely, we succeeded in describing a cubic surface in a given 3-dimensional noncommutative projective space as a 6-point blowup of a noncommutative projective plane. This result is achieved by identifying an ``ambient space'' mapping from the moduli space classifying the latter to the moduli space classifying the former. We also elucidated the Poisson geometry obtained as a semi-classical limit.

研究分野：非可換代数幾何学

キーワード：非可換代数幾何学　del Pezzo曲面　ワイル群

様　式　Ｆ－１９－２

１．研究開始当初の背景

非可換射影代数多様体は射影代数多様体を一般化する概念であり、1980 年代後半から今日に至るまで活発に研究されてきた。近年では、(enhanced)三角圏の手法や観点からのアプローチが極めて有用であることがわかり、ますます発展している（なお、最近、(enhanced)三角圏に注目した幾何学の諸研究が非可換代数幾何学(Noncommutative Algebraic Geometry)と総称されるようになった）。

非可換射影幾何学における問題意識の一つに、可換な射影代数多様体について知られている結果を適切な形で非可換射影代数多様体へ一般化する、というものがある。本研究はその流れの中にあり、代数幾何学の源流の一つとも言える、3 次曲面に関する 19 世紀の記念碑的な結果を非可換な状況へ一般化することを目標としてきた。

2001 年に発表された Michel Van den Bergh の画期的な Memoir ``Blowing up of non-commutative smooth surfaces''において、反標準因子を持つような非可換代数曲面の複数点における爆発(blowup)が定義された。特に、十分条件が良い場合、爆発の結果として得られる非可換代数曲面がある種の非可換次数付き代数として定義された。Van den Bergh は特に非可換射影平面の 6 点爆発に注目し、それらがある種の非可換 3 次元射影空間の中の 3 次曲面であることを証明した。これを前提とした上で、Van den Bergh は、この事実の逆を問題として提起した：すなわち、この種類の非可換 3 次元射影空間の中の 3 次曲面は必ず非可換射影平面の 6 点爆発と同型であるか、という質問を問うた([同 Memoir, Section 1.6])。

Van den Bergh の定理および問題は、可換な射影平面の爆発や可換な 3 次元射影空間の中の 3 次曲面の場合には、19 世紀に完全解決されていた。これらは代数幾何学の源流の一つに数えられる、記念碑的な結果である。Van den Bergh の定理および問題は、これらを非可換な場合に一般化しようというものであった。

可換な 3 次元射影空間は代数多様体として変形しない(rigid)が、非可換な変形を沢山持つことが知られていた([Quantum deformations of projective three-space, Pym 2015])。変形は全部で 6 種類あるが、非可換射影平面の 6 点爆発として得られる非可換代数曲面は、全て R(1,3)型の 3 次元非可換射影空間の 3 次曲面と同型になることが知られていた。

上述の問題について、Colin Ingalls (Carleton, Canada)、Susan Sierra (Edinburgh, UK)、上記の Michel Van den Bergh (Hasselt, Belgium)諸氏らと何年かに渡って共同研究を行っていた。徐々に進展してはいたものの、決定的な理解に至っていなかったため、今回のベルギー長期滞在期間に集中的に議論を行うことで大幅な研究の進展を図った。

２．研究の目的

本研究の目的は次の 2 点であった：

(1) R(1,3)型の 3 次元非可換射影空間の 3 次曲面が全て非可換射影平面の 6 点爆発と同型であることを証明すること。

(2) R(1,3)型の 3 次元非可換射影空間は 3 次曲面を 1 つだけ含むわけではなく、1 次元の変形族(pencil)を含むことがわかっている。そこに現れる 3 次曲面が、具体的にどの非可換射影平面のどの 6 点における爆発なのか、何らかの形で同定・記述する。

目的(2)については、そもそも「同定・記述」を具体的にどのように行うのか、という定式化を見つけるところからして課題であった。

なお、本研究は次数 3 の del Pezzo 曲面の場合であり、これを足掛かりに全ての非可換 del Pezzo 曲面の場合に同様の研究を行う、というのが将来的な目的である。

３．研究の方法

上述のように、そもそも非可換代数曲面の爆発を定義した上に本研究の問題を提示したのがVan den Bergh氏であったので、同氏に共同研究者になってもらった。さらに、非可換代数曲面の爆縮（爆発の逆操作）についての研究を行っていたSierra氏、また、Sierra氏と共に本研究の問題に以前から取り組んでいたIngalls氏にも加わってもらい、4名で議論をしながら問題にチャレンジすることとなった。

当初は、R(1,3)型の3次元非可換射影空間の3次曲面の上に``互いに交わらない6本の直線''が存在することを証明し、それに対してSierra-Stafford-Rogalskiの爆縮定理を適用することで、同曲面が非可換射影平面の6点爆発であることを証明しようという方針を考えていた。なお、非可換射影幾何学においては非可換斉次座標環上の直線加群として直線が定義され、「交わらない」という条件は2つの直線加群の交点数を適切に定義することで定義される。交点数は、非可換代数多様体上の連接層の圏に相当するアーベル圏（対応する次数付き代数の上の次数付き加群の圏をねじれ加群のなす部分圏で局所化して定義される。）におけるExt群の次元の交代和を利用して定義される。

しかし、上述の方針には複数の本質的な課題があった。

(1) 直線の存在を示すために、特別な3次曲面の上に互いに交わらない6本の直線があるという既知の事実からスタートして、変形理論を利用して一般の非可換3次曲面の上にも直線が存在することを示す、という作戦が考えられた。この場合、pencilの特別なメンバーの上にも直線があるということの証明が明らかでない。

(2) 爆縮定理を使うためには、考えている非可換代数曲面がある種の非特異性を持つということを事前に証明する必要があった。しかし、その手立てがわからなかった。

(3) この方針では、与えられた3次曲面が、具体的にどの非可換射影平面とどの6点に対応するのか、全くわからない。

このように行き詰まったため、一旦、考えている非可換代数幾何学の半古典極限に相当するPoisson幾何学を考察することとなった。ここにおいて、非可換3次元射影空間から得られる3次元射影空間上のPoisson構造はR(1,3)型のJacobian Poisson構造であり、そのデータはちょうどsymplectic leafからなる3次曲面のpencilと等価である。後述するように、半古典極限においては上述の主目的に相当する結果を明快に理解することができた。これを足がかりに、非可換代数幾何学のセッティングにおいてどのような結果が期待され、またそれらをどう定式化するべきか、ということを明らかにした。実は、研究全体の中でこのステップが一番crucialであった。

こうして、主定理が何であるべきか、ということが判明してからは、具体的にそれを証明するための手立てを考えることとなった。証明のために、非可換射影代数多様体上の直線のHilbert schemeの性質を調べた。なお、その研究の途中で、E6型Weyl群の部分群に関する特定の命題を証明するためにソフトウェア(SageMath)を援用した。原理的には手計算でも証明できるが、計算量が膨大になるため、計算機を使うのが現実的である。

４．研究成果

まず、非可換射影平面およびその上の6点からなるデータを分類するモジュライ空間を定義した。より正確には、それらのデータのうち、爆発の全空間（爆発の結果は、Van den Berghが証明したように、特定の非可換3次元射影空間の中の3次曲面と同型になるが、その射影空間のことを全空間と呼んでいる。）として得られる非可換3次元射影空間の中の平面（これは標準的に

1 つに定まる。）の同型類が固定したものになるようなデータだけからなるモジュライ空間を定義した。これが 6 次元のアーベル多様体になり、その上に E6 型 Weyl 群が標準的に作用することを確認した。この群作用に関する商空間が重み付き射影空間 P(1,1,1,2,2,2,3)であるということが Looijenga の 1976 年の結果によって知られていた。
一方、平面の同型類を固定した 3 次元非可換射影空間たちのなすモジュライ空間も定義し、それが重み付き射影空間 P(1,1,1,2,2,2)になることを証明した。
前者のモジュライ空間からこの重み付き射影空間に向かって、爆発の全空間を対応させるという有理射を定義した。
本研究の主定理は、この有理射が、P(1,1,1,2,2,2,3)から P(1,1,1,2,2,2)への最後の座標を忘れる線型射影に上述の商射を合成したものであるという主張である。
主定理の証明は、後者の有理射の一般ファイバーを 2 つの条件で特徴づけたうえで、前者の一般ファイバーがそれらの条件を満たすことを確認するというものである。その確認のために、前者の一般ファイバーを直線の Hilbert scheme (の主成分の Galois 閉包)と同一視する、というのが大きな方針である。Hilbert scheme の方が性質を調べやすいため、上述の 2 条件をこれに対して確認することができる。
主定理およびその証明には様々な応用がある。特に、R(1,3)型の 3 次元非可換射影空間が必ず非可換 6 点爆発の全空間として実現されること、pencil のメンバーのうち fat plane を除くものが全て非可換 6 点爆発であることが証明できた。さらに、具体的にどの非可換射影平面とどの 6 点における爆発であるのかということの同定もできた上に、pencil の特異メンバーの上にある直線の本数まで記述できた。
また、上述のように、半古典極限についても詳しく研究した。この場合にも主結果と全く平行な結果が証明できた。そこにおいて、上述の線型射影はちょうど、Poisson 構造つきの 3 次曲面から Poisson 構造を忘れるという射に一致する。他にも、pencil のモジュライとある種の Hurwitz space が双有理同値であることを証明した。
本研究は、次数 3 の del Pezzo 曲面の反標準因子の幾何学を非可換化したものと言える。Del Pezzo 曲面には他に 9 種類の変形類があるが、それらについても非可換化が存在し、本研究の成果と全く平行な諸結果が成立すると期待できる。本研究によって「何が成り立つべきか」ということがクリアになったことがとても大きいと考えている。
「３．研究の方法」で言及したように、本研究において非可換射影代数多様体を研究する上で、先にその半古典極限を良く理解することが極めて有用であった。この発想・手法は今後も大いに役立つはずであり、その重要性に気付くことができた。これは極めて価値が高いと考えている。実際、AS 正則代数を利用した非可換 del Pezzo 曲面論の基礎づけに関する別の共同研究においても、この視点が役に立った。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Eleonore Maria Faber, Colin James Ingalls, Shinnosuke Okawa and Matthew Satriano	４．巻 -
２．論文標題 On stacky surfaces and noncommutative surfaces	５．発行年 2024年
３．雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計10件（うち招待講演　10件／うち国際学会　6件）

１．発表者名 大川新之介
２．発表標題 Blowing down noncommutative cubic surfaces
３．学会等名 新潟代数シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 Shinnosuke Okawa
２．発表標題 The infinite dihedral group and noncommutative quadrics
３．学会等名 Algebraic Geometry in East Asia（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 大川新之介
２．発表標題 非可換代数幾何学
３．学会等名 日本数学会秋季総合分科会（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名
大川新之介

２．発表標題
Artin-Schelter正則代数による非可換del Pezzo曲面の研究について

３．学会等名
Aspects of Mirror Symmetry 2023（連続講演）（招待講演）

４．発表年
2023年

１．発表者名
Shinnosuke Okawa

２．発表標題
The infinite dihedral group and noncommutative quadrics

３．学会等名
Current trends in categorically approach to algebraic and symplectic geometry 2（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2023年

１．発表者名
大川新之介

２．発表標題
Blowing down noncommutative cubic surfaces

３．学会等名
杉本代数セミナー（招待講演）

４．発表年
2023年

１．発表者名
Shinnosuke Okawa

２．発表標題
Blowing down noncommutative cubic surfaces

３．学会等名
2023 NCTS Higher Dimensional Algebraic Geometry Mini-courses and Workshop（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2023年

１．発表者名 Shinnosuke Okawa
２．発表標題 Semiorthogonal indecomposability of irregular surfaces
３．学会等名 The 1st Algebraic geometry Atami symposium（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 Shinnosuke Okawa
２．発表標題 Blowing down noncommutative cubic surfaces
３．学会等名 CURRENT TRENDS IN THE CATEGORICAL APPROACH TO ALGEBRAIC AND SYMPLECTIC GEOMETRY（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 Shinnosuke Okawa
２．発表標題 The reconstruction theorem for AS-regular 3-dimensional cubic Z-algebras
３．学会等名 Interactions between Algebraic Geometry and Noncommutative Algebra (Oberwolfach Workshop 2218)（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

arXiv:2304.14048
https://arxiv.org/abs/2304.14048
arXiv:2404.00175
https://arxiv.org/abs/2404.00175
arXiv:2401.14798
https://arxiv.org/abs/2401.14798
arXiv:2401.14797
https://arxiv.org/abs/2401.14797
arXiv:2304.14048
https://arxiv.org/abs/2304.14048

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
	ミッシェル　ファンデンベルグ (Michel Van den Bergh)	ハッセルト大学・数学科・教授	

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ベルギー	Hasselt 大学	ブリュッセル自由大学		