

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 6 日現在

機関番号：57301

研究種目：基盤研究（S）

研究期間：2008～2011

課題番号：20224001

研究課題名（和文） 非線形現象解明に向けた計算機援用解析学の構築

研究課題名（英文） Development of computer assisted analysis  
for complicated nonlinear phenomena

研究代表者

中尾 充宏（NAKAO MITSUHIRO）

佐世保工業高等専門学校・校長

研究者番号：10136418

研究成果の概要（和文）：非線形偏微分方程式に対する解の数値的検証法の開発とその適用を中心として研究を進め、特に、これまでほとんど研究例を見ない非線形発展方程式に対し、十分有効な数値的検証原理を見出すことに成功した。また、従来から蓄積してきた楕円型方程式の解に対する解の検証方式に新たな知見を加え、その拡張・改良を行うとともに、流体方程式をはじめ理論解析が困難な実際問題に適用して数値的証明を行い、その有効性を実証した。

研究成果の概要（英文）：We were working on the development and applications of the numerical verification methods for solutions of nonlinear partial differential equations, in particular, we succeeded in finding a new and very efficient verification principle for nonlinear evolutionary problems. Also we extended and improved the existing verification methods for solutions of elliptic problems as well as we proved the effectiveness of the computer assisted proofs by applying our methods to resolve the actual nonlinear problems for which any theoretical approaches seem to be not useful to apply.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	19,400,000	5,820,000	25,220,000
2009年度	20,100,000	6,030,000	26,130,000
2010年度	12,800,000	3,840,000	16,640,000
2011年度	13,000,000	3,900,000	16,900,000
総計	65,300,000	19,590,000	84,890,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：数値解析、精度保証付き数値計算法、解の数値的検証、解の事後誤差評価  
計算機援用証明、非線形現象、有限要素法

## 1. 研究開始当初の背景

数値的検証法の研究は、偏微分方程式の場合には、従来から研究代表者(中尾)の研究グループが世界的な先駆的成果を上げてきた。我が国はこの分野の研究で世界をリードできる研究の歴史と陣容とを有しており、またリードすべき立場にもある。一方、研究組織を構成する各分担者は、これまでに数値的検証法とその関連分野において世界的視野に

立つ多くの研究業績を上げている。この様な内外における世界最高水準の知見を集積して研究を行ない、この分野の格段の進展を計り、計算機援用証明法を21世紀における解析学の方法論として確立し、定着させることが強く求められている。

## 2. 研究の目的

次の到達目標を設定した。

(1) 楕円型偏微分方程式に対する解の数値的検証方式について、拡張改良を図るとともに、非線形発展方程式の解の検証手法を新たに開発する。

(2) 実際の非線形現象を扱う他分野の研究者と広く連携し、重要な非線形問題の解の数値的検証を実現し、その有効性を実証する。

(3) 各種数値的検証法の原理的、目的別の分類と適応性の評価を行い、それにもとづく整理統合を行って解析学の方法論としての体系化を目指す。

(4) 数値的検証の汎用性と使い易さを高めるために、検証プログラムの一部を汎用パッケージ化して提供する。

(5) 数式処理等の記号処理的手法を取り入れた高効率の検証法を開発する。

### 3. 研究の方法

研究代表者・分担者ともにそれぞれがこの分野における多くの優れた研究成果を蓄積しており、したがって本研究の実施に当たっては、各人の研究経緯を考慮し、それに即して実施することとした。即ち、研究代表者、各研究分担者とも下記に掲げる分担課題を設定し、それを中心として恒常的に検討を進めた。また定期的に全研究分担者と、国内の関連研究者の参加も要請して研究成果発表会を開催した。その際に研究分担者会議を招集し重点課題の整理を行うとともに、適宜国際研究集会も開催して、本研究の進捗状況を国際的に周知して評価を仰ぎ、以降の研究計画に反映させた。

・研究分担課題：

中尾充宏(研究代表者)：偏微分方程式の解の数値的検証と研究統括

栄 伸一郎：パターンダイナミックスの計算機援用解析

田端正久：計算機を用いた混相問題の解析

長藤かおり：非線形現象の安定性に関する計算機援用解析

村重 淳：非線形力学系理論の計算機援用証明

山本野人：非線形関数方程式の解に対する数値的検証法

渡部善隆：熱対流問題における大域的分岐構造の数値的解明

### 4. 研究成果

本研究により得られた研究成果としては、大きく分けて、

A. 個々の問題に依らない共通的な検証技法とその関連研究

B. 非線形現象を記述する数学モデルに即した数値的検証の実現とその関連研究

の2つに分類される。各々に対する具体的成果と、その意義は以下のとおりである。

### A. 共通的な検証技法とその関連研究

(1) 非線形発展方程式の検証定式化とその効率の実用化(中尾)

簡単な線形熱方程式に対する全離散型有限要素解の構成的誤差評価を導き、その結果を用いて非線形発展方程式の解に対するNewton型数値的検証法の定式化とプロトタイプな非線形放物型方程式への適用例を与えた。特に、半離散化後の線形常微分方程式系に対して、基本解行列を用いた時間補間によって構成的誤差評価を得る方法は、研究進捗評価時まで検討してきた手法と較べても格段に高い効率をもたらす方法であることを数値実験によって確認した。これらの結果は国際的に見ても、これまでにない全く独創的で強力なものであり、そのインパクトは大きい。今後、実際の非線形発展型問題に対する実用的で画期的な検証手法となることが期待できる。

(2) 有限要素法の構成的誤差評価(中尾)

① 非強圧的問題の構成的誤差評価

数値的検証技法を用いて構成的誤差評価を与えた。従来の有限要素法では方程式を定義する作用素の強圧性を仮定しなくては意味を持たなかったが、その仮定を必要としないという意味でもインパクトが大きい成果である。

② 計算機援用証明による構成的L-2誤差評価定数の算定

Aubin-Nitscheの技法と呼ばれる方法を用いないで得られるL-2誤差評価手法を提案し、解の正則性が低い問題の場合にも、鞍点型問題の解の数値的検証を利用するという着想でこれを解決した。これまでにない評価を実証できた学術的価値はきわめて高い。

③ 常微分方程式の初期値問題に対する近似スキームの不安定性を立証

これは、直感と異なる不安定性が生じることを例証した意外性のある結果である。

(3) 数値的検証法の改良(中尾、渡部)

非線形問題の解の数値的検証においては、線形化逆作用素のノルム評価が重要であるが、本研究では、上記(3)の①を利用することで、従来の方法では得られなかった効率よい手法を見いだすことができた。また、高次多項式を用いた定式化により非線形楕円型方程式の解をきわめて高精度で検証することに成功した。

(4) 局所一意性を証明する新たな検証法の開発(山本、渡部、中尾)

局所一意性を保証する無限次元Newton法を定式化し、4階楕円型問題の解の検証に適用しその有効性を立証した。

(5) 遅延微分方程式に対する解の数値的検証法(中尾)

レスラー方程式の周期解の精度保証に関し、解の安定化技法にもとづいて遅延(delay)の

ある方程式に対する未だ世界的にも例のない検証法を定式化した。さらに一般的な遅延微分方程式に対する検証法の原理を与えるものとして注目されている。

(6) 常微分方程式に対する数値的検証法(山本, 中尾)

①常微分方程式初期値問題・境界値問題の精度保証法をベースにして、ポアンカレ写像を用いた周期解の検証法を開発した。数値実験により、従来の方法では難しい条件(ホモクリニック軌道付近の長周期解)に対しても、提案手法は有効であることを示した。

②初期値問題に対する Newton 型手法にもとづく新しい検証法とその実例を与えた。

(7) 反応拡散方程式の解の挙動に関する基礎理論の構築(栄)

将来の数値的検証に向けて有力な示唆を与える、反応拡散方程式の解の挙動に関する理論的知見を得た。

(8) 数値的検証用ソフトの開発(山本)

多倍長演算にもとづく精度保証用ライブラリを開発するとともに記号処理との併用による検証手順の効率化を図った。

(9) 流れ問題に対する高精度数値解析法の開発(田端)

エネルギー安定特性曲線有限要素スキームを開発した。これは従来のスキームに比べ、エネルギー安定性が考慮された数学的に正当な計算法であるだけでなく、疎な要素分割でも正確な表面張力効果が計算でき、対称行列しか現れない効率性の高い実用的なスキームである。本結果は、自由表面を含む流体問題の解に対する数値的検証を定式化する上でも大きな進展をもたらすものである。

## B. 個別の非線形現象の数学モデルに対する数値的検証とその関連研究

(1) 3次元熱対流問題の検証(中尾、渡部、山本)

3次元 Rayleigh-Benard 対流に対する計算機援用証明に取り組み、Benard-cell とよばれる蜂の巣状のセルの存在証明を定量的誤差評価とともに明らかにした。これは、3次元の Navier-Stokes 方程式支配下の熱対流問題という、理論的研究がきわめて困難な問題の数値的証明を実現するものであり、そのインパクトはきわめて大きい。

(2) 流れ問題の不安定性に関する数値的検証(渡部、中尾)

スリット領域の流れの安定性を記述する Orr-Sommerfeld 方程式に対する固有対の包み込みおよび固有値の除外に対する計算機援用証明アルゴリズムを提案し、丸め誤差を考慮した数学的に厳密な数値計算により不安定化を起すパラメータの特定を行なった。この結果は計算機援用証明として、その意義は解析学上でも大きいものである。

(3) 非有界領域でのシュレディンガー作用素の固有値(長藤)

非有界領域では、対象となる作用素のコンパクト性が失われるが、本研究ではそれを克服する定式化を行い、検証例を与えることに成功した。これは従来の方法では困難な固有値除外法の提案とその実例であり、世界的に注目される成果である。

(4) 非線形水波の数値計算における特異点の処理(村重)

等角写像の理論を用いて、非線形水波の数値計算における、解領域の外側に存在する特異点の処理方式を開発した。本方式によって従来の方法では難しい条件(波長が水深に対して長い場合)でも、十分な精度の解が得られる結果が得られた。

(5) 混相流問題の有限要素解析(田端)

気液二相流など混相流問題に対して高い適用性を有する特性曲線有限要素スキームを開発し、砂時計形状領域等で二流体問題の数値シミュレーションを行い、境界条件の挙動への影響、流体の分離・併合現象を捉え、スキームの効率性、信頼性を確認した。

(6) 形態形成モデルの解析(栄)

具体的な反応拡散方程式に現れる進行波解のダイナミクスを調べるための理論を確立し、不均一場を運動するフロント解の運動の解析を行った。本成果により、不均一の強さに応じて、境界条件をコントロールすることにより、任意の位置に安定定常パターンを構成できること、領域の曲がり方に応じて進行パルス解の速度が増減することなど、将来の数値的検証上でも重要な事実を明らかにすることができた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 62 件) (すべて査読有り)

1. Y. Watanabe, T. Kinoshita, M. T. Nakao, A posteriori estimates of inverse operators for boundary value problems in linear elliptic partial differential equations, to appear in *Mathematics of Computation*.
2. M. T. Nakao, T. Kinoshita, T. Kimura, On a posteriori estimates of inverse operators for linear parabolic initial-boundary value problems, *{Vit Computing}* 94 (2012), 151-162.
3. Shin-Ichiro Ei Kota Ikeda and Yasuhiro Miyamoto, Dynamics of a boundary pike for the shadow Gierer-Meinhardt system, *Commun. Pure Appl. Anal.* 11 (2012), no. 1, 115-145.

4. S. Cai, K. Nagatou, Y. Watanabe, A numerical verification method for a system of FitzHugh–Nagumo type, to appear in Numerical Functional Analysis and Optimization.
5. Murashige, S. : Numerical use of exterior singularities for computation of gravity waves in shallow water, Journal of Engineering Mathematics, 査読有り, 2012 (accepted).
6. M. T. Nakao, Y. Watanabe, Numerical Verification Methods for Solutions of Semilinear Elliptic Boundary Value Problems, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, 2 (2011), 2–31.
7. Y. Watanabe, K. Nagatou, M. Plum, M. T. Nakao, A Computer-assisted Stability Proof for the Orr–Sommerfeld Problem with Poiseuille Flow, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, 2 (2011), 123–127.
8. N. Yamamoto, M. T. Nakao, Y. Watanabe, A theorem for numerical verification on local uniqueness of solutions to fixed-point equations, Numerical Functional Analysis and Optimization, 32 (2011), 1190–1204.
9. T. Kinoshita, T. Kimura, M. T. Nakao, A posteriori estimates of inverse operators for initial value problems in linear ordinary differential equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, 236 (2011), 1622–1636.
10. K. Nagatou, M. Plum, M. T. Nakao, Eigenvalue excluding for perturbed-periodic one-dimensional Schrodinger operators, Proceedings of the Royal Society A, doi:10.1098/rspa.2011.0159.
11. Chao-Nien Chen, Shin-Ichiro Ei, Ya-Ping Lin and Shin-Yin Kung, Standing Waves Joining with Turing Patterns in FitzHugh–Nagumo Type Systems, Communications in Partial Differential Equations, 36 (2011), 1–18.
12. K. Nagatou, T. Morifuji, An Enclosure Method for Complex Eigenvalues of Ordinary Differential Operators, a special issue of ``Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE'' on ``Recent Progress in Verified Numerical Computations'', Vol.2, No.1 (2011), pp. 111–122.
13. Wu, T. Y. and Murashige, S. : On tsunami and the regularized solitary-wave theory, Journal of Engineering Mathematics, 査読有り, Vol.70, 2011, pp.137–146.
14. N. Matsuda, N. Yamamoto, ' On the basic operations of interval multiple-precision arithmetic with center-radius form', Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, 2, No.1, 54–67, 2011 査読あり
15. T. Kinoshita, M. T. Nakao, On very accurate enclosure of the optimal constant in the a priori error estimates for  $H^2_0$ -projection, Journal of Computational and Applied Mathematics, 234 (2010), 526–537.
16. T. Minamoto, M. T. Nakao, A numerical verification method for a periodic solution of a delay differential equation, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235 (2010) 870–878.
17. M. T. Nakao, Y. Watanabe, N. Yamamoto, T. Nishida, M.-N. Kim, Computer assisted proofs of bifurcating solutions for nonlinear heat convection problems, Journal of Scientific Computing Vol.43, No. 3 (2010), 388–401, Proc. International Conference on Recent Developments of Numerical Schemes for Flow Problems (INSF2007, Fukuoka, Japan), (2009) DOI 10.1007/s10915-009-9303-3.
18. Chao-Nien Chen, Shin-Ichiro Ei and Ya-Ping Lin, Turing Patterns and Wavefronts for Reaction–Diffusion systems in an Infinite Channels, SIAM J. Appl. Math. 70 No.8 (2010), 2822–2843.
19. O. Pironneau and M. Tabata., Stability and convergence of a {Galerkin}-characteristics finite element scheme of lumped mass type., International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 64, pp. 1240–1253, 2010. 査読有
20. H. Rui and M. Tabata., A mass-conservative characteristic finite element scheme for convection–diffusion problems., Journal of Scientific Computing, Vol. 43, pp. 416–432, 2010., 査読有
21. A. Gilanyi, K. Nagatou, P. Volkmann, On the stability of a functional equation characterizing the absolute

- value of additive functions, Annals of functional Analysis 1, No.2 (2010), , pp.1-6.
22. Murashige, S. and Wu, T.Y. : Dwarf solitary waves and low tsunamis, Journal of Hydrodynamics, 査読有り, Vol.22, Issue 5, Supplement 1, 2010, pp.960-968.
  23. M.-N. Kim, M.T. Nakao, Y. Watanabe, T. Nishida, A numerical verification method of bifurcating solutions for 3-dimensional Rayleigh-Bénard problems, Numerische Mathematik 111 (2009), 389-406.
  24. Kinoshita, T., Hashimoto, K. and Nakao, M.T., On the  $L^2$  a priori error estimates to the finite element solution of elliptic problems with singular adjoint operator, Numerical Functional Analysis and Optimization 30 (2009), 289-305.
  25. Watanabe, Y., Plum, M, Nakao, M.T., A computer-assisted instability proof for the Orr-Sommerfeld problem with Poiseuille flow, Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik(ZAMM) 89 (2009), 5-18.
  26. Nakao, M.T. and Hashimoto, K., A numerical verification method for solutions of nonlinear parabolic problems, Journal of Math-for-Industry, JMI2009A-9 (2009), 69-72.
  27. Y. Watanabe, M. T. Nakao, Numerical verification method of solutions for elliptic equations and its application to the Rayleigh-Bénard problem, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 26 (2009), 443-463.
  28. K. Ohgane, S.-I. Ei and H. Mahara, Neuron phase shift adaptive to time delay in locomotor control, Appl. Math. Modelling 33(2009), 797-811.
  29. H. Notsu and M. Tabata., A single-step characteristic-curve finite element scheme of second order in time for the incompressible Navier-Stokes equations., Journal of Scientific Computing, Vol. 38, No. 1, pp. 1-14, 2009., 査読有
  30. K. Nagatou, Numerical verification method for infinite dimensional eigenvalue problems, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 26-2/3 (2009), pp. 477-491.
  31. Nureki, Y. and Murashige, S. : Computation of Floquet multipliers using an iterative method for variational equations, IEICE Transactions of Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 査読有り, E92-A, No. 5, 2009, pp.1331-1338.
  32. N.Yamamoto, T.Komori, ' An Application of Taylor Models to the Nakao Method on ODEs' , Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 26, No.1, 365-392, 2009 査読あり
  33. Yoshitaka Watanabe:A numerical verification method for two-coupled elliptic partial differential equations, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 査読有, Vol. 26, No. 2-3 (October 2009) pp. 233-247.
  34. Yoshitaka Watanabe:A computer-assisted proof for the Kolmogorov flows of incompressible viscous fluid, Journal of Computational and Applied Mathematics, 査読有, Vol. 223 (January 2009) pp. 953-966.
  35. Nakao, M.T., Hashimoto, K., Guaranteed error bounds for finite element approximations of noncoercive elliptic problems and their applications, Journal of Computational and Applied Mathematics, 218 (2008), 106-115.
  36. Nakao, M.T., Kinoshita, T., Some remarks on the behaviour of the finite element solution in nonsmooth domains, Applied Mathematics Letters 21 (2008), 1310-1314.
  37. NS.-I. Ei, H. Ikeda and T. Kawana, Dynamics of front solutions in a specific reaction-diffusion system in one dimension, Japan J. Ind. Appl. Math. 25 (2008), 117-147.
- [学会発表] (計 194 件)
1. 中尾充宏、放物型初期境界値問題の数値解に対する精度保証について、2011 年度 RIMS 研究集会「科学技術計算における理論と応用の新展開」特別講演、京都大学数理解析研究所、2011 年 10 月 26 日
  2. Nakao, M.T., On the verified computation of solutions for parabolic initial-boundary value problems, Japanese-German Workshop on Computer-Assisted Proofs and Verification Methods, Karlsruhe

- Institute of Technology, Karlsruhe, Germany, September 20, 2011.
3. Nakao, M.T., On the rigorous error estimation in the numerical methods and its applications for computer assisted proofs, Workshop on Computational Dynamics, Foundations of Computational Mathematics Conference 2011(FoCM'11), Budapest, Hungary, 2011年7月12日
  4. 中尾 充宏, 数値計算の信頼性評価---コンピュータを使った新しい解析学---、日本応用数学会 2010 年度年会総合講演、明治大学駿河台キャンパス、2010年9月7日
  5. M.T. Nakao, Verified computation of a periodic solution of the Roessler system by using delayed feedback control, INDAM Meeting: Theoretical and computational methods in nonlinear differential equations, "Centro Residenziale Universitario di Bertinoro", Forli, Italy, September 16, 2009.
  6. M.T. Nakao, Some remarks on the Aubin-Nitsche trick of FEM solutions for elliptic problems with singular adjoint operator, 6th International Conference on Scientific Computing and Applications(SCA2008), Pusan National University, Busan, Korea, June 3, 2008.

[図書] (計 7 件)

1. 中尾充宏・渡部善隆, 実例で学ぶ精度保証付き数値計算---理論と実装---, サイエンス社, 2011, 216頁.
2. 田端正久, 偏微分方程式の数値解析. 岩波書店, 東京, 2010. 144頁.
3. Nakao, M.T., and Oishi, S. (Guest Editors), Special Issue: State of the Art for Self-Validating Numerical Computations, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 26-2/3 (2009), 411 pages.
4. 栄伸一郎, 反応拡散系の数理, 自己組織化ハンドブック 2009 NTS出版. 1.2 節 149-154.
5. 田端正久・中尾充宏, 偏微分方程式から数値シミュレーションへ/計算の信頼性評価, 現代技術への数学入門シリーズ, 講談社, 東京, 2008. (分担頁: 63-120)
6. 栄伸一郎, 山田光太郎, パターン形成の数理, 講談社, 2008, 126p.
7. 田端正久, 中尾充宏. 偏微分方程式から数値シミュレーションへ/計算の信頼

性評価. 現代技術への数学入門シリーズ. 総頁数: 120, 分担頁: 7-62, 講談社, 東京, 2008.

[その他]

ホームページ等

- (1) <http://www.sasebo.ac.jp/research/system/master/>
- (2) <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~mtnakao/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中尾 充宏 (Nakao Mitsuhiro)  
佐世保工業高等専門学校・校長  
研究者番号: 10136418

(2) 研究分担者

栄 伸一郎 (Ei Shin-Ichiro)  
九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授  
研究者番号: 30201362

田端 正久 (Tabata Masahisa)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号: 30093272

長藤 かおり (Nagatou Kaori)  
九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・准教授  
研究者番号: 40326426

村重 淳 (Murashige Sunao)  
公立ほこだて未来大学・システム情報科学部・教授  
研究者番号: 40302749

山本 野人 (Yamamoto Nobito)  
電気通信大学・電気通信学部・教授  
研究者番号: 30210545

渡部 善隆 (Watanabe Yoshitaka)  
九州大学・情報基盤研究開発センター・准教授  
研究者番号: 90243972

(3) 連携研究者

大石 進一 (Oishi Shinichi)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号: 20139512