

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 5日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2008 ~ 2012

課題番号：20244001

研究課題名（和文）

代数群、量子群およびヘッケ環の表現論

研究課題名（英文）

Representation theory of algebraic groups, quantum groups and Hecke algebras

研究代表者

庄司 俊明 (SHOJI TOSHIAKI)

名古屋大学・多元数理科学研究科・名誉教授

研究者番号：40120191

研究成果の概要（和文）：Exotic ベキ零錐の軌道分解から得られる交差 cohomology と C 型 Weyl 群の既約指標との間の Springer 対応を証明した。それを利用してこれらの交差 cohomology の Poincare 多項式に関する Achar-Henderson の予想を証明した。

研究成果の概要（英文）：Proved the Springer correspondence between the intersection cohomologies arising from the exotic nilpotent cone and irreducible characters of Weyl groups of type C. By using this, proved the conjecture of Achar-Henderson concerning with Poincare polynomials of such intersection cohomologies.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	6,400,000	1,920,000	8,320,000
2009年度	5,100,000	1,530,000	6,630,000
2010年度	6,600,000	1,980,000	8,580,000
2011年度	5,100,000	1,530,000	6,630,000
2012年度	5,100,000	1,530,000	6,630,000
総計	28,300,000	8,490,000	36,790,000

研究分野：表現論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：有限簡約群、複素鏡映群、指標層、対称空間、Kostka 多項式

## 1. 研究開始当初の背景

(1)有限簡約群の既約表現の分類は1980年代に Lusztig により完成された。残された大きな問題である既約指標値の統一的な計算のために Lusztig は簡約群の幾何的理論である指標層の理論を構築し、指標層の特性関数として得られる類関数によって既約指標の値が実質的に記述できることを予想として定式化した。またこれらの類関数が簡約群の Green 関数により統一的に計算できることを示した。Lusztig 予想は研究代表者により、簡約群の中心が連結の場合に証明されたが、Lusztig の戦略に従って既約指標を実際に計算するためには、さらにいくつかのスカラ

を具体的に決定する必要がある。研究開始当初の目的のひとつは、これらのスカラを決定し、有限簡約群の既約指標を計算するアルゴリズムを完成させることにあった。

(2)一方、研究代表者は Green 関数を計算するアルゴリズムを、特に古典群の場合に、組み合わせ論的に再構成し、それが Green-Macdonald による一般線形群の Green 関数の純組み合わせ論的構成とマッチしていることを示した。特に、斜交群の場合、このアルゴリズムは  $C_n$  型 Weyl 群の表現論に関連している。 $C_n$  型 Weyl 群の自然な拡張として複素鏡映群  $G(r,1,n)$  が考えられる。 $r=1$  の場合が対称群  $S_n$ 、 $r=2$  の場合が

$C_n$  型 Weyl 群である。斜交群の Green 関数を計算するアルゴリズムは形式的に、Weyl 群を  $G(r,1,n)$  に置き換えても意味を持つ。複素鏡映群を Weyl 群に持つ簡約群は存在しないが、Broue を始めとする多くの人々により、有限簡約群の指標理論がこの仮想的な群の指標理論に形式的に拡張できることが 1990 年代より認識されてきた。研究代表者の構成した  $G(r,1,n)$  に付随する Green 関数も、そのような仮想的簡約群の Green 関数として捉えることができる。研究開始当初のもう一つの目的は、この Green 関数を利用して、Lusztig の既約指標計算のアルゴリズムに従って、 $G(r,1,n)$  を Weyl 群に持つ仮想的簡約群の“既約指標”を計算することにあった。

(3) 有限簡約群の表現論から派生した Hecke 環の表現論は、量子群の表現論と関連して大きな発展を遂げた。特に A 型 Hecke 環の modular 表現の圏を affine 量子群の結晶基底と結び付ける Lascoux-Leclerc-Thibon, Ariki の理論は多くの研究者の関心を集めていた。(2) の場合と同じく、A 型 Hecke 環の  $G(r,1,n)$  型への形式的拡張として Ariki-Koike 代数が知られている。Ariki-Koike 代数および、それに付随する巡回的  $q$ -Schur 代数の modular 表現論の研究が当初の研究目標であった。

## 2. 研究の目的

1972 年、Lusztig は、組み合わせ論で良く知られた Kostka 多項式が、 $GL_n$  のベキ零軌道から得られる交差 cohomology によって記述できることを示した。この結果は純粋に組み合わせ論的手法によって得られる Kostka 多項式が幾何的手法によって再構成されることを示したもので後に続く指標層の理論への道を切り開いた画期的な成果である。Kostka 多項式は  $GL_n$  の場合の Green 関数と本質的に同じものである。この結果は既に古典的なものだが、近年、興味深い拡張が発見された。Achar-Henderson は  $X = GL(V) \times V$  のベキ零部分  $X_0$  (enhanced ベキ零錐という) の  $GL(V)$  軌道から得られる交差 cohomology が研究代表者によって導入された複素鏡映群に付随する Green 関数 = 複素鏡映群に付随する Kostka 多項式を記述することを示した。この場合の Kostka 多項式は  $G(r,1,n)$  の  $r=2$  の場合に対応するもので、群としては  $C_n$  型 Weyl 群であるが、古典群そのものとは直接関係しない対象である。さらに Finkelberg-Ginzburg-Travkin は  $X$  上に指標層の類似物を構成した。一方、一般の対称空間に対しても、Lusztig の指標層の類似物が Ginzburg により導入された。さらに対称空間  $GL(V)/Sp(V)$  の拡張として  $X = GL(V)/Sp(V) \times V$  が考えられる。加藤は  $X$  のベキ零部分  $X_0$  (exotic ベキ零錐と呼ばれ

る) について詳しく調べた。Achar-Henderson は  $X_0$  の  $Sp(V)$ -軌道から得られる交差 cohomology が enhanced ベキ零錐と同様の Kostka 多項式を表示することを予想として定式化した。以上の結果はすべて 2008 年以降に得られたものである。対称空間は、ある意味で簡約群の拡張と考えられるが、 $GL(V) \times V$  や  $GL(V)/Sp(V) \times V$  はそれとは異質の対象であるにも拘らず、我々の定義した Kostka 多項式と関係しているということは極めて興味深い現象である。このような状況を踏まえて、当初の研究目標を少しを変更し、指標層の理論の種々の多様体への拡張を調べることを研究の第一目標とすることにした。

## 3. 研究の方法

当面の研究対象は、 $GL(V) \times V$  や  $GL(V)/Sp(V) \times V$  などの具体的な多様体であるが、我々の研究の視点は簡約群に対する指標層の理論がこれらの多様体に対してどの程度拡張できるかの検証である。従って、扱う対象は個別なものであっても、指標層の一般理論をモデルとして、できるだけ普遍的な議論により指標層の理論をこれらの多様体に対して拡張することを目指す。

## 4. 研究成果

(1) Exotic 対称空間における Springer 対応。

$V$  を奇数標数の  $2n$  次元ベクトル空間として、 $G = GL(V)$ ,  $H = Sp(V)$  とおく。対称空間  $G/H$  の拡張として  $X = G/H \times V$  を考える。 $X$  を exotic 対称空間という。 $X$  に付随するベキ単多様体  $X_0$  は加藤によって導入された exotic ベキ零錐と同形になる。 $X_0$  には  $H$  が作用し、有限個の  $H$ -軌道に分割される。K. Sorlin との共同研究で、 $X$  上に良い性質を持った指標層を構成した。これらの指標層は、次のように構成される。ある多様体  $Y$  から  $X$  への写像を考えて、 $Y$  上の定数層の  $X$  への直像に  $C_n$  型 Weyl 群  $W$  の作用を定義する。この直像を  $W$  の作用によって分解して得られる単純偏屈層が我々の指標層である。これらの指標層は作り方から  $W$  の既約指標によってラベル付けされる。我々は  $X$  上の指標層を  $X_0$  に制限すると、それが  $X_0$  の  $H$ -軌道から得られる交差 cohomology に一致することを示した。これにより、 $W$  の既約指標と  $X_0$  の  $H$ -軌道との間の自然な全単射が得られる。これが exotic 対称空間における Springer 対応である。一方、 $P$  を  $n$  の double partition 全体の集合とすると、加藤により、 $X_0$  の  $H$ -軌道の全体は、 $P$  によりラベル付けされることが知られていた。また、 $W$  の既約指標の全体も  $P$  による自然なラベル付けを持つことが知られている。我々はこの両者のラベル付けが

Springer 対応を与えていることを示し、Springer 対応の具体的な記述に成功した。証明には、本来の指標層の理論における、「Lusztig の制限定理」を exotic 対称空間の場合に拡張し、それを利用することにより結果を得た。なおこれらの結果は加藤により得られていたものであるが、我々は、指標層の立場から別証明を与えた。これらの結果は「Exotic symmetric space over a finite field, I」としてまとめられ、arXiv に投稿された。(arXiv:1207.5093)。また雑誌「Transformation Groups」に掲載が決まっている。

## (2) Kostka 多項式に関する Achar-Henderson 予想の解決

$X_0$  上の  $H$  軌道から得られる交差 cohomology が上記の Kostka 多項式を与えるという Achar-Henderson の予想を証明した。議論の概略は以下の通りである。 $Y$  上の定数層の  $X$  への直像を  $X_0$  へ制限して得られる偏屈層の特性関数を exotic 対象空間の Green 関数という。前述の結果によりこの偏屈層は  $W$  の作用を持つが、Green 関数を  $W$  の既約指標により分解して得られる関数が、Exotic ベキ零錐における  $H$ -軌道の交差 cohomology の Poincare 多項式になることが、Springer 対応を通して証明される。一方、簡約群の場合と同様の手法で、この Green 関数に対する指標公式を証明した。さらに指標公式を利用して、直像として得られる  $X$  上の種々の偏屈層の間の内積および、種々の Green 関数の間の内積を具体的に与える直交関係式を証明した。これらの結果から上記の Poincare 多項式がある種の行列関係式をみたすことが導かれる。Kostka 多項式が同様の行列関係式により特徴付けられることが分っているので、これより、我々の Poincare 多項式が Kostka 多項式に一致することが導かれる。以上の議論により、Achar-Henderson の予想を証明した。なお、この結果は加藤により、全く異なる手法によって証明された。我々の議論は、簡約群の指標層に対する議論の自然な拡張である。さらに  $Y$  上の tame 局所系の直像として得られる  $X$  上の半単純偏屈層の分解に現れる  $H$  不変単純偏屈層の集まりとして、 $X$  上の指標層を定義した。上記の直交関係式を利用して、指標層の特性関数として得られる  $X$  上の  $H$  不変関数達が、 $X$  上の  $H$  不変関数全体のなすベクトル空間の基底をなすことを証明した。これは簡約群に対する指標層の特性関数に関する主要な性質であり、それが exotic 対称空間の場合にも成立することを示している。以上の結果は「Exotic symmetric space over a finite field, II」として論文にまとめられ、arXiv に投稿された。(arXiv:12125861)

## (3) Ginzburg 型指標層の決定

我々の導入した  $X$  上の指標層は、具体的に構成された半単純偏屈層の分解に基づくもので、あくまで具体的な分類によるものである。一方 Ginzburg は簡約群の場合の Lusztig の定義を変形して対称空間の指標層の(分類によらない)概念的な定義を与えた。Ginzburg の考え方を援用して exotic 対称空間の場合にも、概念的な指標層の定義を与えることができる。これを  $X$  上の Ginzburg 型指標層ということにする。この定義は分類によらない反面、定義から指標層の具体的な記述を得ることは難しい。我々の構成した指標層は、Ginzburg 型指標層の部分集合(主系列に属する指標層)をなしている。指標層に期待される主要な性質として、その特性関数が  $H$  不変関数のなす空間の基底を与えるということが挙げられる。そこで(2)の結果より、我々の指標層は Ginzburg 型指標層と一致することが期待される。実際、そうになっていることを証明した。この結果は同時に Ginzburg 型指標層の分類を与える。証明の方針は、以下の通りである。簡約群の場合にならって、指標層の誘導関手、制限関手を定義し、また cuspidal 指標層を定義する。すべての指標層は cuspidal 指標層からの誘導に含まれること、また cuspidal 指標層は  $G$  がトーラスの場合にしか存在しないことを示して結果を得る。以上の結果は

「Exotic symmetric space over a finite field, III」にまとめられ、arXiv に投稿された(arXiv: 1304.7554)。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 68 件)

- ① T. Shoji and K. Sorlin ; Exotic symmetric space over a finite field. Transformation Groups, 査読有、Vol. 18, 2013. 掲載予定
- ② R. Inoue, O. Iyama , B. Keller, A. Kuniba and T. Nakanishi. : Periodicities of T-systems and Y-systems, Dilogarithm Identities, and Cluster Algebras I:type B<sub>r</sub>. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 査読有、Vol. 49, 2013, 1-48.
- ③ T. Shoji and N. Xi; Iwaoris' s question for affine Hecke algebras. Contemporary Math. 査読有、Vol. 565, 2012, 243-259.
- ④ C. Aimot, O. Iyama, I. Reiten and G. Todorov: Preprojective algebras and c-sortable words. Porc. London Math. Soc. 査読有、Vol. 104, 2012, 513-539.
- ⑤ S. Di, J. Antonio, H. Ishi and A. Loi; Kahler immersions of homogeneous Kahler

manifolds into complex space forms. Asian J. Math. 査読有、16, (2012), 479 - 487.

⑥ K. Nagao; Derived categories of small toric Calabi-Yau 3-folds and curve counting invariants. Q. J. Math. 査読有、63, (2012), 965-1007.

⑦ A. Morisson, S. Mozgovoy, K. Nagao and B. Szendroi; Motivic Donaldson-Thomas invariants of the conifold and the refined topological vertex. Adv. Math. 査読有、230, (2012), 2065 - 2093.

⑧ O. Iyama; Cluster tilting for higher Auslander algebras. Adv. Math. 査読有、226, (2011), 1-61.

⑨ H. Ishi; Unitary holomorphic multiplier representations over a homogeneous bounded domain. Adv. Pure Appl. Math. 査読有、2, (2011), 405 - 419.

⑩ M. Chlouveraki and H. Miyachi; Decomposition matrices for d-Harish-Chandra series; the exceptional rank two cases. LMS. J. Comput. Math. 査読有、14 (2011), 271 - 290.

⑪ K. Nagao and H. Nakajima; Counting invariant of perverse coherent sheaves and its wall-crossing. Int. Math. Res. Not. Vol. 2011 (2011), 3885-3938.

⑫ T. Shoji and K. Wada; Cyclotomic  $Q$ -Schur algebras associated to the Ariki-Koike algebra. Representation Theory. 査読有、14, (2010), 379-416.

⑬ R. Inoue, O. Iyama, A. Kuniba, T. Nakanishi and J. Suzuki; Periodicities of T-systems and Y-systems. Nagoya Math. J. 査読有、197, (2010), 59 - 174.

⑭ S. Okada;  $(q, t)$ -deformations of multivariate hook product formulas. J. Algebraic Combin. 査読有、32, (2010), 399 - 416.

⑮ J. Chuang and H. Miyachi; Runner removal Morita equivalences. Progr. Math. 査読有り、84 (2010), 55 - 79.

⑯ A. B. Buan, O. Iyama, I. Reiten and J. Scott; Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups. Compos. Math. 査読有、145 (2009), 1035 - 1079.

⑰ O. Iyama and I. Reiten; Fomin-Zelevin-sky mutation and tilting modules over Calabi-Yau algebras. Amer. J. math. 査読有、130, (2008), 1087 - 1149.

⑱ I. Burdan, O. Iyama, B. Keller and I. Reiten; Cluster tilting for one-dimensional hypersurface singularities, Adv. Math. 査読有、217, (2008), 2443 - 2484.

⑲ S. Fjii, H. Kanno, S. Moriyama and S.

Okada; Instanton calculus and chiral one-point functions in supersymmetric gauge theories. Adv. Theor. Math. Physics. 査読有、12. (2008), 1401-1428.

⑳ H. Miyachi; Rouquier blocks in Chevalley groups of type E. Adv. Math. 査読有、217, (2008), 2841 - 2871.

[学会発表] (計 151 件)

① T. Shoji; Character sheaves on an exotic symmetric space. Conference in memory of Tony A. Springer, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong 2013.1.5 (招待講演)

② T. Shoji; Character sheaves on a symmetric space and Kostka polynomials. MSJ-SI 2012, Schubert calculus, 大阪市立大学 2012.7.27. (招待講演)

③ S. Okada; Symmetric functions and branching rules for spinor representations. 2012 Shanghai conference on algebraic combinatorics. Shanghai Jiaotong University, Shanghai, China. 2012.8.18. (招待講演)

④ H. Ishi; Gindikin-Wallach set for a homogeneous cone. Workshop on Harmonic analysis and probabilities. Angers, France, 2012.9.4. (招待講演)

⑤ K. Nagao; Donaldson-Thomas theory and mapping class group. Workshop on geometry of derived categories and representation theory. Northwestern University, Boston, USA. 2012.5.3. (招待講演)

⑥ T. Shoji; Character sheaves associated to the enhanced nilpotent cone. Workshop on Chevalley groups, reflections groups, braid groups. Les Houches, France. 2011.1.27. (招待講演)

⑦ O. Iyama; Tilting and cluster tilting for stable categories of Cohen-Macaulay modules. Workshop on matrix factorization. University of Bielefeld, Germany. 2011.5.7. (招待講演)

⑧ S. Okada; Two parameter deformations of multivariate hook product formulae. International conference on Asymptotics and special functions. City University of Hong Kong. Hong Kong 2011.6.1. (招待講演)

⑨ H. Ishi; On the Wallach set for a homogeneous bounded domain. Workshop on Recent developments in harmonic analysis and their applications. Marrakech, 2011.4.28. (招待講演)

⑩ K. Nagao; Motivic Donaldson-Thomas invariants and wall-crossing. Workshop on derived categories. Newton Institute for

mathematical Sciences, Cambridge, U.K. 2011.4.16. (招待講演)

⑪ T. Shoji; The enhanced nilpotent cone and the Kostka functions associated to complex reflection groups. The 5th international conference on representation theory. Xi-an, China, 2010.8.14. (招待講演)

⑫ O. Iyama; Stable categories of Cohen-Macaulay modules and cluster categories. Workshop on interactions between algebraic geometry and non commutative algebra. Oberwolfach Institute. Germany. 2010.5.14. (招待講演)

⑬ S. Okada; Symmetric functions and spinor representations. Workshop on Whittaker functions, Crystal bases and quantum groups. Banff Center, Banff, Canada. 2010.6.10. (招待講演)

⑭ K. Nagao; Cluster transformations and their quantization. Japan-China workshop on geometry. Xi-an, China. 2010.9.7. (招待講演)

⑮ S. Okada; A compound determinant identity and its application. Joint meeting of KMS and AMS, Special session of algebraic combinatorics. Ewha Womans University, Seoul, Korea. 2009.12.16. (招待講演)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

[その他]

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

庄司 俊明 (SHOJI TOSHIAKI)  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・  
名誉教授  
研究者番号：40120191

### (2) 研究分担者

岡田 聡一 (OKADA SOICHI)  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・  
教授

研究者番号：20224016

伊山 修 (IYAMA OSAMU)  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・  
教授

研究者番号：70347532

伊師 英之 (ISHI HIDEYUKI)  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・  
准教授

研究者番号：00326068

(H23 - H24)

小森 靖 (KOMORI YSUSHI)  
立教大学・理学部数学科・准教授

研究者番号：80343200

(H20 - H21)

宮地 兵衛 (MIYACHI HYOE)  
大阪市立大学大学院理学研究科・准教授

研究者番号：90362227

(H24 は連携研究者)

長尾 健太郎 (NAGAO KENTARO)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・  
助教

研究者番号：10585574

(H22 - H24)

### (3) 連携研究者

筱田 健一 (SHINODA KEN-ICHI)

上智大学・理工学部・名誉教授

研究者番号：20053712

谷崎 俊之 (TANISAKI TOSHIYUKI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：70142916

兼田 正治 (KANEDA MASAHARU)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：60204575

有木 進 (ATIKI SUSUMU)

大阪大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号：40212641

和田 堅太郎 (WADA KENTARO)

信州大学・理学部・助教

研究者番号：60583862

(H23 - H24)